TP1 – Estimation spectrale paramétrique

Le but de ce TP est de comparer deux méthodes d'estimation spectrale, l'une paramétrique et l'autre non, pour un processus AR(p). On rappelle qu'un processus AR(p) est modélisé par

$$x[n] = -\sum_{k=1}^{p} a[k]x[n-k] + u[n],$$

où $(a[k])_{1\leq k\leq p}$ désigne les coefficients AR, $u[n]$ l'entrée du modèle et $x[n]$ le signal d'intérêt.

1. **Etude de la réponse impusionelle d'AR(1)**

   (a) A l'aide de la fonction `filter`, créer la réponse impulsionelle du processus AR(1) $(x_p[n])_{1\leq n\leq N}$ en fournissant en entrée un pulse :

   $$u[n] = u_0\,\delta[n,1], \quad 1 \leq n \leq N,$$

   où δ est le delta de Kronecker ($\delta[i,j] = 1$ si $i = j$, 0 si $i \neq j$).

   Calculer aussi l'expression théorique de x_p, qui sera utile pour la suite.

   (b) A l'aide de la fonction `xcorr` avec comme option suplémentaire la chaine `'biased'`, calculer la version biaisée de sa fonction d'autocorrélation $\hat{r}_p[k]$, définie comme :

   $$\hat{r}_p[m] = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N-m} x[k+m]x^*[k], & m \geq 0, \\ r_p[-m]^*, & m < 0. \end{cases}$$

   Tracer $\hat{r}_p[m]$ en fonction du délai m avec la fonction `plot`.

   A partir de l'expression de x_p, calculer théoriquement l'expression de $\hat{r}_p$. Pour N suffisament grand, comment estimeriez-vous simplement le coefficient $a[1]$ à partir de la seule conaissance de r_p ?

   (c) Que remarquez-vous lorsque $a[1] > 0$, $a[1] < 0$, $a[1] \sim 0$ et $a[1] \sim 1$?

(d) Calculer la transformée de fourrier X_p de x_p à l'aide de la fonction `fft` :

$$X_p[l] = \sum_{k=1}^{N} x_p[k] \, \mathrm{e}^{-2i\pi(k-1)(l-1)/N},$$

ainsi que la densité spectrale de puissance $\hat{\Gamma}_p$, définie comme

$$\hat{\Gamma}_p[l] = \frac{1}{\pi N} \, |X_p[l]|^2$$

Le facteur de normalisation πN est utilisé pour correspondre à la définition standard de densité spectrale de puissance de Matlab.
Tracer la densité spectrale de puissance $\hat{\Gamma}_p[l]$ en fonction de la fréquence renormalisé $f[l] = (l-1)/N$ avec la fonction `plot`.

2. **Estimation spectrale d'un processus AR(1) issu d'un bruit graussien**

(a) Reproduiser les expériences précédentes lorsque $u[n]$ désigne un processus Gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2 géneré à partir de la fonction `randn`.

Montrer que la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance du signal crée admettent les formes théoriques suivantes :

$$\begin{aligned} r[m] &\equiv \mathbb{E}\left\{x[k]x[k+m]^*\right\} \\ &= \frac{\sigma^2 a^m}{1-a^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma[l] &\equiv \frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} r[m] \mathrm{e}^{-2i\pi f[l] m} \\ &= \frac{\sigma^2}{\pi\left[1 + a^2 - 2a\cos(2\pi f[l])\right]}, \end{aligned}$$

avec $a \equiv -a[1]$ (le théorème de Wiener-Khinchin a été utilisé pour écrire la troisième ligne).

Comparer avec vos calculs de la question 1.

(b) A l'aide de la fonction `levinson` ou en utilisant votre réponse à la question 2b, estimer le coefficient AR $a[1]$ du signal obtenu.

(c) Comparer le résultat de l'estimation spectrale paramétrique (utiliser la formule théorique de la question 2a) et non-paramétrique (à l'aide de la fonction `pwelch`).