

**ENS DE LYON**

MASTER SCIENCE DE LA MATIÈRE  
*École Normale Supérieure de Lyon*  
*Université Claude Bernard Lyon I*



Stage 2012–2013  
Guilhem Poy  
M1 Physique

---

## Stabilité des jets ultrarelativistes

---

**Résumé :** La stabilité de deux modèles simples de jets est explorée analytiquement à l'aide de la théorie de la perturbation. Il est montré qu'il existe des modes instables à toutes longueurs d'ondes tant qu'il n'y a pas de champ magnétique, et que l'effet d'un champ magnétique est vraisemblablement de déplacer les modes instables vers les petites longueurs d'ondes. Par ailleurs, on s'aperçoit qu'il n'existe pas de maximum global d'instabilité sur l'ensemble des modes. La prise en compte des effets relativistes a pour conséquence de rendre moins instables les modes. Une résolution numérique des relations de dispersion ainsi qu'une simulation hydrodynamique permettent d'appuyer les résultats analytiques.

**Mots clefs :** *magnétohydrodynamique, instabilité, Kelvin-Helmoltz, jets relativistes*

Stage encadré par :

**Christophe Winisdoerffer et Rolf Walder**

[cwinisdo@ens-lyon.fr](mailto:cwinisdo@ens-lyon.fr) / tél. (+33) 4 72 72 87 02

[rolf.walder@ens-lyon.fr](mailto:rolf.walder@ens-lyon.fr) / tél. (+33) 4 72 72 89 16

Centre de Recherche d'Astrophysique de Lyon

*École normale supérieure de Lyon 46 Allée d'Italie 69364 Lyon*

<http://www-obs.univ-lyon1.fr/>



# Remerciements

Je tiens à remercier Christophe pour le soutien et l'aide qu'il a pu me fournir durant le stage, notamment sur l'importance des approximations initiales, et Rolf pour tout ses conseils sur les simulations hydrodynamiques. Cela a été un vrai plaisir de travailler dans ces conditions pendant trois mois (mise à part la chaleur dans le bureau!).

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>II</b>	<b>Modèle de jet relativiste sans champ magnétique</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Approche analytique : perturbation linéaire d'une configuration d'équilibre</b>	<b>3</b>
1.1	Relation de dispersion de la perturbation . . . . .	3
1.2	Limite des basses fréquences : naissance des modes instables . . . . .	6
1.3	Limite des hautes fréquences : résonances des modes instables . . . . .	6
1.4	Limite des hautes fréquences : mort des modes instables . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Approche semi-analytique : résolution numérique de la relation de dispersion</b>	<b>8</b>
2.1	La structure des modes . . . . .	8
2.2	Naissance du mode ordinaire . . . . .	9
2.3	Naissance des modes de réflexion . . . . .	11
2.4	Maximum d'instabilité des modes de réflexion . . . . .	11
2.5	Mort des modes ( $m, l = 0$ ) . . . . .	11
2.6	Bilan . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Approche numérique : simulations avec le code hydrodynamique PLUTO</b>	<b>12</b>
3.1	Le dispositif numérique . . . . .	12
3.2	Quelques remarques sur la validité du dispositif numérique . . . . .	13
3.3	Résultats . . . . .	14
<b>III</b>	<b>Modèle de jet relativiste avec champ magnétique</b>	<b>15</b>
<b>4</b>	<b>Approche analytique</b>	<b>15</b>
4.1	Relation de dispersion . . . . .	15
4.2	Limite des basses fréquences : naissance des modes . . . . .	17
4.3	Limite des hautes fréquences : résonance des modes instables . . . . .	17
4.4	Limite des hautes fréquences : mort des modes instables . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Approche semi-analytique</b>	<b>18</b>
<b>IV</b>	<b>Conclusion</b>	<b>20</b>
<b>V</b>	<b>Annexes</b>	<b>21</b>
<b>6</b>	<b>Rappels sur les fonctions de Bessel et de Hankel</b>	<b>21</b>
<b>7</b>	<b>Démonstration de la formule analytique des maxima d'instabilité de l'approche temporelle</b>	<b>21</b>
	<b>Références</b>	<b>25</b>

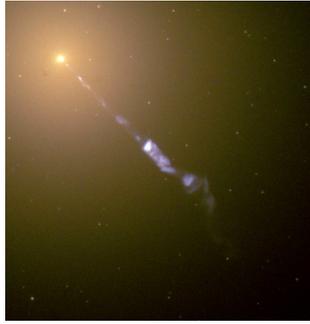


FIGURE 1 – Le jet émanant de la galaxie M87. Image mise à disposition par J. A. Biretta, Hubble Heritage Team, NASA.

## Première partie

# Introduction

Le première observation de jet astrophysique a eu lieu en 1918 (cf. [4]) : il s'agit de celui de la galaxie elliptique supergéante Messier 87 (M87). La figure 1 présente une image récente de cette galaxie, où l'on peut apercevoir une structure linéaire émanant du centre de la galaxie et se propageant sur approximativement 5000 années-lumière. Bien que la première observation de ce jet soit assez ancienne, l'interprétation de cette structure en tant qu'*écoulement* est relativement récente et date des années 70, où fut avancée l'idée que ce qui est observé est la trace visible d'un écoulement d'énergie et de matière vers l'extérieur de la galaxie (cf. [12]).

Depuis, de nombreux jets ont été observés, dont les paramètres physiques (vitesse, courbure, longueur, caractéristiques du fluide, champ magnétique, etc...) couvrent un large ensemble de valeurs. Ces jets peuvent provenir d'objets galactiques (par exemple un microquasar, qui correspond à une binaire dont l'un des deux soleils est un objet compact possédant un disque d'accrétion), ou extra-galactiques (par exemple un noyau galactique actif, qui correspond à une région compacte très lumineuse au centre de la galaxie). Ces jets se propagent sur des distances appréciables (pouvant aller jusqu'à plusieurs millions d'années-lumière) et peuvent être remarquablement bien collimatés (c'est le cas de M87), même si ce n'est pas une règle générale. Deux questions se posent alors : quel est le mécanisme de formation des jets et comment expliquer la stabilité remarquable de ces jets ? La première question n'a toujours pas été entièrement résolue, et n'est de toute façon pas l'objet d'étude de ce rapport. La deuxième question est tout à fait justifiée, car plusieurs effets de magnétohydrodynamique (entre autres l'instabilité de Kelvin-Helmholtz) sont à même de déstabiliser, voire de couper, la propagation du jet. L'objectif de ce rapport est de fournir une étude analytique et numérique de la stabilité de tels jets, afin d'identifier les causes de stabilité et d'instabilité.

Afin d'atteindre cet objectif, il convient tout d'abord de s'accorder sur la modélisation du jet à proprement parler. Suivant l'approche de Birkinshaw (cf. [3]) on adoptera le modèle de *faisceau* par la suite, le faisceau étant l'écoulement théorique sensé produire le *jet* que l'on observe. Comme on ne s'intéresse pas au mécanisme de formation, on supposera que le fluide constituant le faisceau est injecté dans le fluide du milieu ambiant par une sorte de buse. On considérera que les grandeurs physiques intéressantes (pression, densité, vitesse et champ magnétique) sont constantes respectivement dans le faisceau et le milieu ambiant. Comme c'est une approximation plutôt violente, on supposera l'existence d'une couche de cisaillement entre le faisceau et le milieu ambiant. La pression est considérée constante partout, afin d'obtenir l'équilibre mécanique, et densité, vitesse et champ magnétique possèdent des profils arbitraires dans la couche de cisaillement. Très souvent, les jets sont supersoniques (vitesse du jet supérieure à la vitesse du son dans le milieu ambiant) et donc on s'attend à une onde de choc se développant au niveau de la tête du faisceau. Ainsi, le faisceau ne se propage pas directement dans le milieu ambiant, mais dans le milieu ambiant "choqué", et le fluide du faisceau "rebondit" sur le choc frontal, créant ainsi un écoulement de retour à l'interface entre faisceau et milieu ambiant "choqué".

Les figures 2 et 3 présentent un schéma du modèle de faisceau, ainsi qu'une image issue d'une simulation numérique. La simulation en question a été réalisée avec le code hydrodynamique PLUTO (cf. [8]), en imposant un apport constant de matière au niveau de la buse, une condition aux limites axisymétrique pour l'axe du jet, et des conditions aux limites "outflow" (pas de gradients) pour les autres bords de grille. On observe clairement l'onde de choc se développant (zone de haute pression avec discontinuités sur les bords), ainsi que l'écoulement de retour (filament bleu le long du jet, correspondant à une vitesse longitudinale négative).

Tel quel, ce modèle ne permet pas beaucoup de travail analytique. En effet, tenir compte des ondes de chocs et d'une couche de cisaillement en toute généralité rend les équations de la dynamique du système inexploitable sans simulation numérique. Ainsi, on se restreint à une approche perturbative. On oublie toute onde de choc

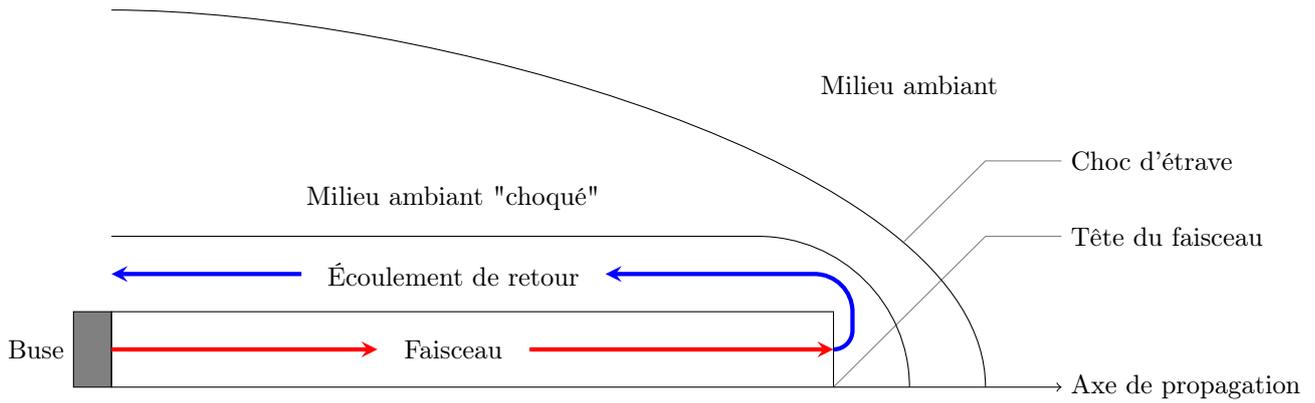


FIGURE 2 – Schéma du modèle de faisceau

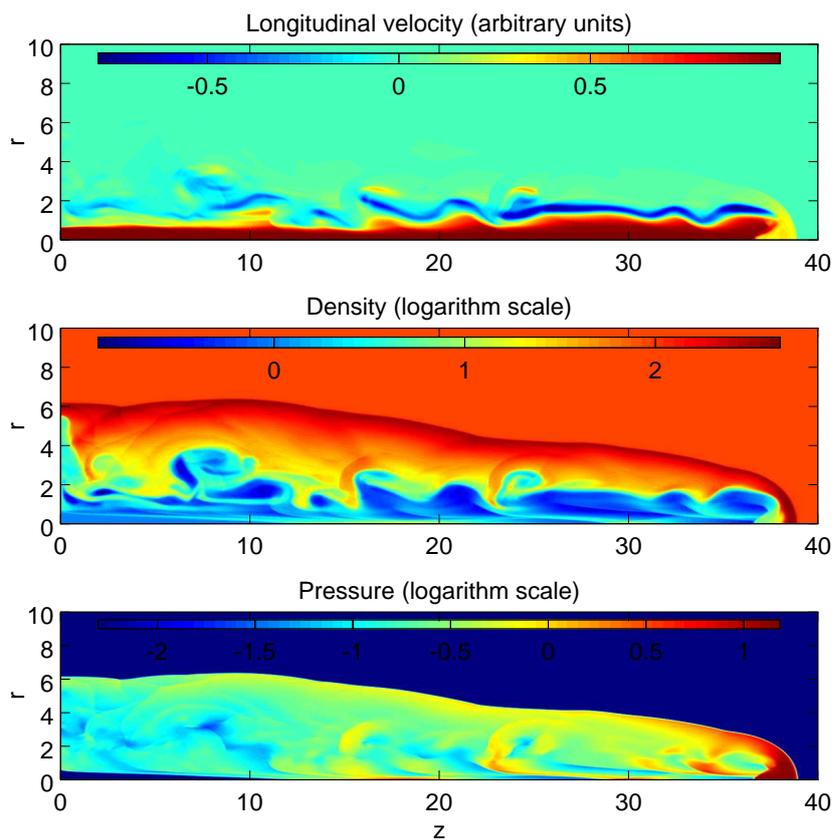


FIGURE 3 – Simulation hydrodynamique de la propagation d'un jet. Les unités de longueur sont arbitraires, ainsi que les unités de vitesse, pression et densité. Ces deux dernières grandeurs sont tracées en échelle logarithmique, afin de mettre en évidence le choc d'étrave et la zone de haute pression frontale.

et l'on ne garde que le faisceau se propageant dans le milieu ambiant. A l'ordre zéro, on impose une pression constante et des profils de vitesse, densité et champ magnétique. Puis on perturbe ces profils avec une certaine longueur d'onde (le long de l'axe de propagation du jet) et une certaine pulsation, et on regarde comment cette perturbation croît ou décroît dans le régime linéaire. A priori, on s'attend à voir se développer une instabilité de Kelvin-Helmholtz, à cause de la discontinuité de la vitesse longitudinale entre le faisceau et le milieu ambiant.

Cette approche, bien que limitée (le régime linéaire ne permet pas de savoir si les modes de perturbation saturent ou divergent), permet tout de même d'avoir une idée des longueurs d'ondes et pulsations typique à même de déstabiliser le jet, et de déterminer quel mécanisme peut diminuer l'influence des modes instables. On appliquera cette méthodologie, avec en complément des simulations numériques appuyant et complétant les résultats analytiques, à deux principaux modèles : le premier, développé dans la partie suivante, néglige toute influence du champ magnétique, et considère des fluides relativistes avec une équation d'état polytropique ; le deuxième modèle, développé dans la troisième partie, rajoute l'influence d'un champ magnétique orienté dans la direction de propagation du jet, sous les hypothèses de la magnétohydrodynamique relativiste idéale.

## Deuxième partie

# Modèle de jet relativiste sans champ magnétique

On considère dans cette partie un modèle simple de jet constitué d'un fluide non magnétique, non visqueux et neutre. Trois approches sont mises en oeuvre à partir de ce modèle.

La première approche, analytique, consiste à partir d'une configuration d'équilibre simple pour le jet, à savoir des profils cylindriques sans gradients pour la densité et la vitesse, et une pression constante pour l'équilibre mécanique entre le jet et le milieu ambiant. Puis, on applique une perturbation avec une certaine pulsation et un certain vecteur d'onde, et l'on cherche une relation de dispersion imposant une contrainte entre cette pulsation et ce vecteur d'onde. Cette relation de dispersion est ensuite résolue dans le cas des basses et hautes fréquences.

La deuxième approche, semi-analytique, consiste à reprendre la relation de dispersion de l'approche précédente, et à la résoudre numériquement afin de vérifier les résultats analytiques.

La troisième approche, numérique, consiste à résoudre numériquement les équations du modèle dans le cas général, et de vérifier les résultats analytiques dans la phase de croissance linéaire des perturbation. En plus de cette vérification, des effets intéressants seront mis en évidence, comme l'influence stabilisatrice d'une couche de cisaillement pour les profils de vitesse et de densité.

## 1 Approche analytique : perturbation linéaire d'une configuration d'équilibre

### 1.1 Relation de dispersion de la perturbation

Considérons un modèle simple de jet constitué d'un fluide non magnétique, non visqueux, et neutre. L'écoulement d'un tel fluide est régi par les équations suivantes (voir [9]) :

$$T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0, \quad (1)$$

$$(nsu^\mu)_{,\mu} = 0, \quad (2)$$

$$(nw^\mu)_{,\mu} = 0. \quad (3)$$

L'équation 1 correspond à la conservation de l'énergie et de l'impulsion, avec  $T^{\mu\nu}$  le tenseur énergie-impulsion. Pour un fluide parfait, ce tenseur s'exprime comme  $T^{\mu\nu} = (\rho + \frac{P}{c^2})u^\mu u^\nu + P\eta^{\mu\nu}$ , avec  $\rho$  la densité du fluide (contenant à la fois la contribution de la densité du fluide au repos  $n$  et l'équivalent en masse de la densité énergétique du fluide  $\frac{ne}{c^2}$ , où  $e$  est l'énergie interne spécifique du fluide),  $p$  la pression du fluide,  $w^\mu$  la quadrivitesse, et  $\eta^{\mu\nu}$  la métrique de Minkowski. L'équation 2 correspond à la conservation de l'entropie, avec  $s$  l'entropie par particule. Enfin, l'équation 3 correspond à la conservation du nombre de particules.

En utilisant  $w^\mu = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$ , avec  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$  le facteur de lorentz, et  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$  la dérivée lagrangienne, ces trois équations se réécrivent :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \gamma^2 \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) - \frac{P}{c^2} \right] + \nabla \cdot \left[ \gamma^2 \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) \mathbf{v} \right] = 0, \quad (4)$$

$$\gamma^2 \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \nabla P + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{Ds}{Dt} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\gamma n)}{\partial t} + \nabla \cdot (\gamma n \mathbf{v}) = 0. \quad (7)$$

Dans la limite non relativiste, les équations 4 et 7 deviennent équivalentes, et l'équation 5 devient l'équation d'Euler.

Dans un soucis de simplification, on se restreint à un fluide dont l'énergie interne spécifique  $e$  est négligeable devant  $c^2$ , et dont l'entropie est modélisée par une équation d'état polytropique  $s = s_0 + \frac{k_B}{\Gamma-1} \ln(P\rho^{-\Gamma})$ , avec  $\Gamma$  l'indice polytropique du fluide. Dans ce cas, l'équation 7 ne sert plus, et l'équation 6 se réécrit :

$$\frac{1}{P} \frac{DP}{Dt} = \frac{\Gamma}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}. \quad (8)$$

Partons d'un modèle d'équilibre simple, avec un jet cylindrique et stationnaire se propageant dans la direction  $\mathbf{u}_z$ . On impose pour le moment des profils généraux  $\rho = \rho^{(0)}(r)$  et  $\mathbf{v} = v^{(0)}(r)\mathbf{u}_z$  pour la densité de particules et la vitesse. Dans ce cas, l'équation 5 impose une pression constante  $P = P^{(0)}$ . On introduit alors des perturbations de la forme  $F^{(1)}(r)e^{i(kz+l\theta-\omega t)}$ , avec  $F = P, \rho, v_r, v_\theta, v_z$ .  $l$  correspond au nombre azimuthal, et permet de rendre compte de perturbations brisant la symétrie cylindrique.  $k$  correspond au vecteur d'onde complexe de la perturbation, et  $\omega$  à la pulsation de la perturbation, elle aussi complexe.

Notre objectif est de trouver une relation de dispersion imposant une contrainte entre  $k$  et  $\omega$ . En linéarisant les équations précédentes, j'ai obtenu l'équation régissant l'évolution de la perturbation en pression

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P^{(1)}}{dr^2} + \frac{dP^{(1)}}{dr} \left[ \frac{1}{r} + \frac{2\gamma^{(0)^2}{\left(k - \frac{\omega v^{(0)}}{c^2}\right)} dv^{(0)}}{\omega - kv^{(0)}} \frac{dv^{(0)}}{dr} - \frac{1}{\rho^{(0)} + \frac{P^{(0)}}{c^2}} \frac{d\rho^{(0)}}{dr} \right] \\ + P^{(1)} \left[ \gamma^{(0)^2} \left\{ \left( \frac{kv^{(0)} - \omega}{c_s} \right)^2 - \left( k - \frac{\omega v^{(0)}}{c^2} \right)^2 \right\} - \left( \frac{l}{r} \right)^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

On peut retrouver aisément cette équation dans la littérature, par exemple dans [1], ou [3]. Dans cette dernière équation, on a défini la vitesse du son locale  $c_s = \sqrt{\frac{\Gamma P^{(0)}}{\rho^{(0)}}}$ .

Il paraît difficile de trouver une solution générale de cette équation sans préciser les profils  $\rho^{(0)}(r)$  et  $v^{(0)}(r)$ . Intéressons-nous à un modèle sans couche de cisaillement, avec densité et vitesse constantes dans leur milieu respectifs (i.e. l'intérieur du jet et le milieu ambiant). Plus précisément, on considère les profils d'équilibres suivants :

$$\rho^{(0)}(r) = \begin{cases} \rho_i & , r < R \\ \rho_e & , r \geq R \end{cases}, \quad (10)$$

$$v^{(0)}(r) = \begin{cases} v_i & , r < R \\ 0 & , r \geq R \end{cases}, \quad (11)$$

où  $R$  correspond au diamètre du jet. Dans la suite, toute grandeur séparément constante à l'intérieur et l'extérieur du jet sera suivie d'un indice "i" ou "e" suivant le domaine désigné, en accord avec la notation utilisée ci dessus pour les profils. Dans ce cas, l'équation d'évolution pour la perturbation en pression 9 devient l'équation de Bessel par morceaux suivante :

$$\frac{d^2 P^{(1)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dP^{(1)}}{dr} + P^{(1)} \left[ \beta_{i,e}^2 k^2 - \left( \frac{l}{r} \right)^2 \right] = 0, \quad (12)$$

avec  $\beta_i = \gamma_i \sqrt{\left( \frac{v_\varphi - v_i}{c_{si}} \right)^2 - \left( 1 - \frac{v_\varphi v_i}{c^2} \right)^2}$ ,  $\beta_e = \sqrt{\left( \frac{v_\varphi}{c_{se}} \right)^2 - 1}$ . Dans ces expressions,  $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$  correspond à la vitesse de phase longitudinale, a priori complexe. L'interprétation physique de ces deux coefficients est donnée un peu plus loin dans le texte. Pour l'instant, il reste à résoudre l'équation de Bessel 12 (on se référera à la première annexe pour quelques rappels sur les fonctions de Bessel) en se fixant des conditions aux limites physiques :

1. Aucune des grandeurs ne doit diverger pour  $r$  quelconque,  $t$  fini.
2. Afin de respecter l'équilibre mécanique, les pressions doivent correspondre à l'interface entre le jet et le milieu ambiant.
3. Afin d'assurer la continuité de l'interface, le déplacement radial  $\xi_r$ , défini par  $\frac{D\xi_r}{Dt} = v_r^{(1)}$ , doit être continu en  $r = R$ .
4. Afin de respecter la condition de radiation de Sommerfeld (pas d'énergie provenant de l'infini), on impose que pour  $r \rightarrow \infty$ , la vitesse de phase radiale doit être positive.

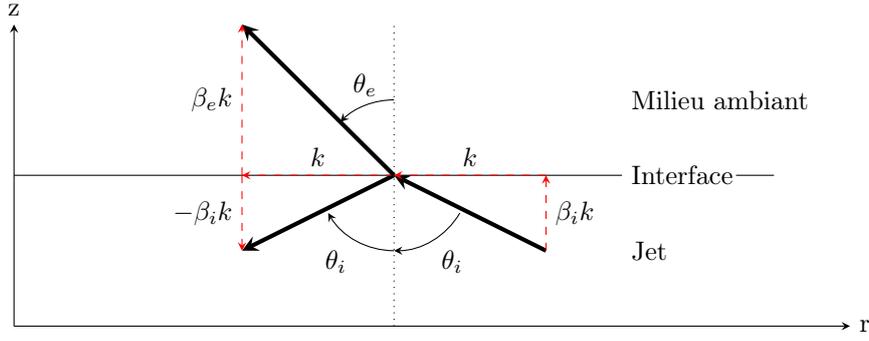


FIGURE 4 – Schéma de l'interprétation des fonctions propres de l'équation de Bessel ; l'intérieur du jet se ramène à une onde incidente et une onde réfléchie ; l'extérieur du jet se ramène à une onde transmise.

Les conditions 1, 2 et 4 impliquent que la solution de l'équation 12 peut se mettre sous la forme :

$$P^{(1)} = \begin{cases} \epsilon P^{(0)} \frac{J_l(\beta_e k r)}{J_l(\beta_e k R)} & , r < R \\ \epsilon P^{(0)} \frac{H_l(\beta_e k r)}{H_l(\beta_e k R)} & , r \geq R \end{cases} \quad (13)$$

En effet, la fonction de Bessel de première espèce  $J_l$  ne diverge pas en zéro, contrairement à la fonction de Bessel de deuxième espèce  $Y_l$ . La continuité est assurée en  $r = R$ , où la pression vaut  $\epsilon P^{(0)}$  de part et d'autre de l'interface. Enfin, la fonction de Hankel de première espèce  $H_l = J_l + iY_l$  admet pour équivalent en l'infini  $H_l(\beta_e k r) \sim_{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi \beta_e k r}} e^{i(\beta_e k r - \frac{2l+1}{4}\pi)}$ , assurant ainsi la condition de Sommerfeld tant que  $\Re(\beta_e k) > 0$  et la condition 1 tant que  $\Im(\beta_e k) > 0$ .

Par ailleurs, cet équivalent à l'avantage de donner une interprétation physique au coefficient  $\beta_e$ . En effet, en l'infini, la perturbation sera équivalente à  $\sqrt{\frac{2}{\pi \beta_e k r}} e^{i(\vec{k}_{eff} \vec{r} - \omega t - \frac{2l+1}{4}\pi)}$ , où  $\vec{k}_{eff} = k(\vec{u}_z + \beta \vec{u}_r)$  correspond à un vecteur d'onde effectif, pouvant a priori être complexe. La partie réelle permet de donner la direction de propagation des plans d'ondes, à l'aide de l'angle entre  $\Re(\vec{k}_{eff})$  et la normale à l'interface :

$$\theta_e = \cot^{-1} \left( \frac{\Re[\beta_e] - \Im[\beta_e] \frac{\Im[k]}{\Re[k]}}{\Im[\beta_e]} \right). \quad (14)$$

Ainsi, la solution de pression dans le milieu ambiant,  $H_l(\beta_e k r)$ , correspond à une onde sonore dont la phase se propage avec un angle  $\theta_e$  par rapport à la normale de l'interface. On peut à juste titre se demander si cette interprétation est aussi valide à l'intérieur du jet, où l'on a utilisé la fonction de Bessel de première espèce  $J_l$ . Si l'on considère  $\|\beta_i k R\| \gg 1$  (ce qui s'avère être valide pour certaines longueurs d'onde, cf. partie suivante), alors proche de l'interface, la perturbation admet pour équivalent  $e^{i(kz - \omega t)} \left( e^{i(\beta_i k r - \frac{2l+1}{4}\pi)} + cc \right)$ , ce qui mène à la même définition d'angle :

$$\theta_i = \cot^{-1} \left( \frac{\Re[\beta_i] - \Im[\beta_i] \frac{\Im[k]}{\Re[k]}}{\Im[\beta_i]} \right). \quad (15)$$

Dans ce cas, la solution de pression dans le jet,  $J_l(\beta_i k r)$ , s'interprète comme deux ondes sonores dont les phases se propagent avec les angles  $\pm \theta_i$  par rapport à la normale de l'interface. Bien qu'assez sommaire, cette interprétation à l'avantage de pouvoir se ramener à un système d'ondes incidente, réfléchie et transmise. De plus, cette interprétation permet de comprendre l'invariance par changement de signe de  $\beta_i$ , qui ne fait qu'échanger ondes incidente et réfléchie. Par convention, on choisira  $\Re(\beta_i) > 0$ . Le schéma 4 résume cette interprétation.

Il ne reste plus qu'à utiliser la condition 3. En utilisant les équations linéarisées, j'ai montré que :

$$\xi_r = \frac{-\frac{dP^{(1)}}{dr}}{\gamma^{(0)2} \left( \rho^{(0)} + \frac{P^{(0)}}{c^2} \right) (kv^{(0)} - \omega)^2}. \quad (16)$$

Ainsi, en utilisant l'équation 13 dans cette dernière équation, la condition de continuité du déplacement radial implique nécessairement que :

$$D(k, \omega) \equiv \frac{H'_l(\beta_e k R)}{H_l(\beta_e k R)} \frac{\beta_e}{\left( \rho_e + \frac{P^{(0)}}{c^2} \right) v_\varphi^2} - \frac{J'_l(\beta_i k R)}{J_l(\beta_i k R)} \frac{\beta_i}{\gamma_i^2 \left( \rho_i + \frac{P^{(0)}}{c^2} \right) (v_\varphi - v_i)^2} = 0. \quad (17)$$

On désignera dans la suite cette équation comme relation de dispersion. Birkinshaw (cf. [1] ou [3]), Payne et Cohn (cf [10], cas non relativiste), ou encore Ray (cf [11]), ont trouvé la même relation de dispersion pour ce modèle de jet particulier (à des différences de notation près). Il reste maintenant à résoudre cette équation afin de trouver les modes permis, c'est à dire les couples  $(\omega, k)$  tels que  $D(k, \omega) = 0$ .

L'approche la plus générale est de résoudre cette équation dans  $\mathbb{C}^2$ , mais cela ne laisse qu'une marge de manoeuvre très réduite pour l'analytique, et suppose une certaine prudence lors de la résolution numérique, due à des finesses d'algèbre complexe. Afin de simplifier la résolution, deux approches sont possibles : l'approche spatiale, où l'on suppose  $\omega \in \mathbb{R}$  et l'on cherche  $k \in \mathbb{C}$ , et l'approche temporelle, où l'on suppose  $k \in \mathbb{R}$  et l'on cherche  $\omega \in \mathbb{C}$ .

L'approche spatiale revient à injecter une perturbation avec une certaine pulsation à un endroit donné, puis à regarder comment cette perturbation évolue lorsqu'elle est advectée le long du jet. Si l'amplitude de cette perturbation croît (ie.  $\Im(k) < 0$ ), alors ce mode particulier est dit instable. Si au contraire l'amplitude décroît (ie.  $\Im(k) \geq 0$ ), alors ce mode est dit stable. L'approche temporelle revient à injecter une perturbation avec une certaine longueur d'onde le long du jet, puis à regarder à une position donnée comment cette perturbation évolue au cours du temps. Si l'amplitude croît (ie.  $\Im(\omega) > 0$ ), le mode est instable, et si l'amplitude décroît (ie.  $\Im(\omega) \leq 0$ ), le mode est stable.

Même avec cette simplification, la complexité de la fonction  $D(k, \omega)$  ne permet pas de trouver une solution analytique générale. Ainsi, je me suis limité à deux cas limites, les petites et hautes fréquences. J'ai choisi de ne présenter que les résultats de mes calculs et leur interprétation, sans aucun éléments de démonstration, car le cheminement est purement technique et ne présente aucun intérêt physique. Cependant, pour se donner une idée des moyens mathématiques employés, on pourra trouver dans la seconde annexe la résolution complète des modes temporeux à la résonance.

## 1.2 Limite des basses fréquences : naissance des modes instables

On définit les nombres de mach intérieur et extérieur  $M_i = \frac{v_i}{c_{si}}$  et  $M_e = \frac{v_e}{c_{se}}$ , et le rapport des densités (corrigé du facteur relativiste)  $\eta = \frac{\rho_e + \frac{P(0)}{c^2}}{\rho_i + \frac{P(0)}{c^2}}$ . Les index  $R$  et  $I$  désignent respectivement partie réelle et partie imaginaire.

Par ailleurs, on définit un point de stabilité marginale comme un point résolvant la relation de dispersion dans le plan réel (i.e. pas de partie imaginaire pour  $\omega$  et  $k$ ), mais au voisinage duquel les parties imaginaires de  $\omega$  et  $k$  ne sont pas nécessairement nulles.

Pour  $M_i < 1$  (i.e. jet subsonique), on ne trouve qu'un seul mode instable par nombre azimuthal  $l$ , qui naît dans les basses fréquences au point de stabilité marginale ( $\omega = 0, k = 0$ ). Le comportement asymptotique pour l'approche temporelle et spatiale est donné dans le tableau 1

Pour  $M_i > 1$  (i.e. jet supersonique), on trouve une infinité de modes instables par nombre azimuthal  $l$ , indexés par le nombre radial  $m$ . Ce nombre représente le nombre de zéro dans la perturbation de pression à l'intérieur du jet. Le mode  $(m, l)$  naît dans les basses fréquences au point de stabilité marginale donné dans le tableau 1. Seul le comportement asymptotique des modes  $m = 0$  (qui correspondent au même modes que dans le cas  $M_i < 1$ ) est donné. Dans la suite, on appellera modes ordinaires tout les modes tels que  $m = 0$ , et modes de réflexion tout les modes tels que  $m \geq 1$ .

Dans la limite considérée (basses fréquences), on observe que les modes ordinaires sont stabilisés dans le régime relativiste, car la partie imaginaire de  $\omega$  ou  $k$  possède une dépendance en  $1/\gamma_i^2$  (pour  $l = 0$ ) ou  $1/\gamma_i$  (pour  $l \geq 1$ ). Ces mêmes modes sont stabilisés si le jet est suffisamment dense (dépendance en  $\sqrt{\eta}$ ). Enfin, ces modes sont non dispersifs dans les basses fréquences : la vitesse de groupe est égale à la vitesse de phase.

## 1.3 Limite des hautes fréquences : résonances des modes instables

Partant de son point de stabilité marginale dans les basses fréquences, le mode  $(m \geq 1, l)$  est de plus en plus instable lorsque la fréquence augmente, jusqu'à atteindre un maximum d'instabilité (maximum de  $\|\omega^I\|$  pour l'approche temporelle, maximum de  $\|k^I\|$  pour l'approche spatiale) dans les moyennes et hautes fréquences. L'existence de ce maximum est assujettie à la condition nécessaire  $v_i > \frac{c_{si} + c_{se}}{1 + \frac{c_{si}c_{se}}{c^2}}$ .

On définit  $\kappa = \frac{\Gamma + (\frac{c_{se}}{c})^2}{\Gamma + (\frac{c_{si}}{c})^2}$ . Les expressions approchées de ces maxima d'instabilité sont données dans le tableau

2. Elles sont valides dans le cas des jets fortement supersonique  $v_i \gg \max\left(c_{si} + \frac{1}{\gamma_i \kappa} c_{se}, c_{se} + \frac{\kappa}{\gamma_i} c_{si}\right)$  et pour les nombres radiaux  $m$  vérifiant  $(l + m)\frac{\pi}{2} \gg \|l^2 - \frac{1}{4}\|$ . La fonction  $\Upsilon(x)$  est définie par l'équation implicite  $\Upsilon(x) + \ln[\Upsilon(x)] = \ln x$ . On retiendra de cette fonction trois propriétés :

1.  $\Upsilon(x) \sim_0 x$
2.  $\Upsilon(x) \sim_\infty \ln x$

	$(m = 0, l = 0)$	$(m = 0, l \geq 1)$	$(m \geq 1, l)$
Stab. Marg.	$\begin{cases} \omega_{0,0} = 0 \\ k_{0,0} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \omega_{0,l} = 0 \\ k_{0,l} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \omega_{m,l} = 0 \\ k_{m,l} = \frac{\alpha_{m,l}}{\gamma_i R \sqrt{M_i^2 - 1}} \end{cases}$
Temporel	$\begin{cases} kR \ll 1 \\ \omega_{0,0}^R = kv_i \\ \omega_{0,0}^I = kv_i \frac{(kR) \sqrt{\eta \ln \left[ \frac{1}{(M_e^2 - 1)^{1/4} \sqrt{kR}} \right]}}{\gamma_i^2} \end{cases}$	$\begin{cases} kR \ll 1 \\ \omega_{0,l}^R = kv_i \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \eta} \\ \omega_{0,l}^I = kv_i \frac{\gamma_i \sqrt{\eta}}{\gamma_i^2 + \eta} \end{cases}$	Indeterminé
Spatial	$\begin{cases} \frac{\omega R}{c_{si}} \ll 1 \\ k_{0,0}^R = \frac{\omega}{v_i} \\ k_{0,0}^I = -\frac{\omega}{v_i} \frac{\left( \frac{\omega R}{c_{si}} \right) \sqrt{\eta \ln \left[ \frac{\sqrt{M_i}}{(M_e^2 - 1)^{1/4} \sqrt{\frac{\omega R}{c_{si}}}} \right]}}{M_i \gamma_i^2} \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\omega R}{c_{si}} \ll 1 \\ k_{0,l}^R = \frac{\omega}{v_i} \\ k_{0,l}^I = -\frac{\omega}{v_i} \frac{\sqrt{\eta}}{\gamma_i} \end{cases}$	Indeterminé

TABLE 1 – Limites asymptotiques des modes pour les basses fréquences

Approche temporelle	Approche spatiale
$\begin{cases} k_{m,l,max} = \frac{(l+2m)\pi}{2\gamma_i M_i R} \left( 1 + \frac{\gamma_i}{\sqrt{\kappa\eta}} \right) \\ \omega_{m,l,max}^R = \frac{\pi c_{si}(l+2m)}{2\sqrt{\kappa\eta} R} \\ \omega_{m,l,max}^I = \frac{c_{si}}{2\gamma_i R} \Upsilon \left[ \frac{2\pi(l+2m)}{1 + \frac{\sqrt{\kappa\eta}}{\gamma_i}} \right] \end{cases}$	$\begin{cases} \omega_{m,l,max} = \frac{\pi c_{si}(l+2m)}{2\sqrt{\kappa\eta} R} \\ k_{m,l,max}^R = \frac{\pi(l+2m)}{2M_i R} \left( \frac{1}{\sqrt{\kappa\eta}} + \frac{1}{\gamma_i} \right) \\ k_{m,l,max}^I = -\frac{1}{2\gamma_i M_i R} \Upsilon [2\pi(l+2m)] \end{cases}$

TABLE 2 – Expression du mode  $(m, l)$  à son maximum d'instabilité, pour  $m$  suffisamment grand et  $v_i \gg \max \left( c_{si} + \frac{1}{\gamma_i \kappa} c_{se}, c_{se} + \frac{\kappa}{\gamma_i} c_{si} \right)$ 

### 3. $\Upsilon(x) < \ln x$ si $x > e$

Cependant, le second équivalent est inutilisable en pratique car la convergence est extrêmement lente (on commence à avoir une précision de l'ordre de 1% lorsque  $x$  est de l'ordre de  $10^{300}$ ). Un équivalent plus utile serait  $\Upsilon(x) \sim_{\infty} f(x) \ln x$ , avec  $f(x)$  une fonction variant lentement d'approximativement 0.7 pour  $x$  proche de l'unité à 1 lorsque  $x \rightarrow \infty$ .

La prise en compte des effets relativistes a toujours un effet stabilisateur (dépendance en  $1/\gamma_i$ ). On observe par ailleurs que les maxima d'instabilité sont de plus en plus instable et correspondent à des longueurs d'ondes de plus en plus petites à mesure que le nombre radial ou le nombre azimuthal augmente. Ainsi, il n'existe pas a priori de maximum global d'instabilité sur l'ensemble des modes  $(m, l)$ , à moins de supposer l'existence d'un mécanisme coupant les modes dans les petites longueurs d'ondes.

## 1.4 Limite des hautes fréquences : mort des modes instables

En augmentant encore plus la fréquence du mode, loin des maxima d'instabilité de la partie précédente, les modes  $(m, l)$  meurt rapidement. Le tableau 3 présente les expressions asymptotiques associées à cette mort : la partie imaginaire de  $\omega$  (respectivement  $k$ ) chute en  $1/k^2$  (respectivement en  $1/\omega^2$ ). Ces expressions sont valides pour  $m$  vérifiant  $(l+2m - \frac{1}{2}) \frac{\pi}{2} \gg \|l^2 - \frac{1}{4}\|$ , et  $k$  ou  $\omega$  suffisamment grand (i.e. loin du maximum d'instabilité). Dans ces expressions, on a défini  $v^- = \frac{v_i - c_{si}}{1 - \frac{\beta^2}{M_i^2}}$  (avec  $\beta = \frac{v_i}{c}$ ), correspondant à la vitesse de phase du mode pour les très hautes fréquences.

Approche temporelle	Approche spatiale
$\begin{cases} \omega_{m,l}^R = \left[ \frac{M_i - 1}{M_i - \beta^2} \right] kv_i \\ \omega_{m,l}^I = \left[ \frac{\eta c_{si} \gamma_i^2 \pi^2 (l + 2m - \frac{1}{2})^2 (M_i - 1)^2}{4R \sqrt{\left(\frac{v^-}{c_{se}}\right)^2 - 1}} \right] \frac{1}{(kR)^2} \end{cases}$	$\begin{cases} k_{m,l}^R = \left[ \frac{M_i - \beta^2}{M_i - 1} \right] \frac{\omega}{v_i} \\ k_{m,l}^I = - \left[ \frac{\eta \gamma_i^2 \pi^2 (l + 2m - \frac{1}{2})^2 (M_i - 1)^2}{4R \sqrt{\left(\frac{v^-}{c_{se}}\right)^2 - 1}} \right] \left( \frac{c_{si}}{R\omega} \right)^2 \end{cases}$

TABLE 3 – Expression du mode  $(m, l)$  pour  $m$  suffisamment grand, pour les hautes fréquences loin des résonances

Contrairement aux basses fréquences, la prise en compte des effets relativistes augmente l'instabilité (facteur  $\gamma_i^2$ ). Les jets dense sont toujours plus stable (facteur  $\eta$ ). Enfin, dans cette limite, les modes sont non dispersifs

## 2 Approche semi-analytique : résolution numérique de la relation de dispersion

L'objectif de cette partie est de résoudre numériquement la relation de dispersion de la partie précédente, afin de déterminer plus précisément la structure des modes et de tester les expressions analytiques de la partie précédente. J'ai écrit l'algorithme de résolution à l'aide de Mathematica, en parallélisant la recherche sur quatre coeurs.

Pour l'approche spatiale, on commence par fixer  $l$  et  $\omega$ , et l'on recherche dans le plan complexe les valeurs de  $k = k^R + ik^I$  qui minimisent et annulent la fonction  $\frac{\|D(k,\omega)\|}{1+\|D(k,\omega)\|}$  (cette forme est choisie afin d'éviter les divergences). L'algorithme de minimisation utilisé est l'algorithme du simplexe. On remarque que ces minima correspondent aux valeurs des modes  $(m, l)$  pour la valeur particulière de  $\omega$  choisie, avec les  $m$  croissants correspondant aux  $k^R$  croissants. Ensuite, on fait varier par petit pas  $\omega$  et l'on recherche les valeurs des modes à nouveau par minimisation, en estimant la position des nouveaux minima à l'aide des précédents minima. L'estimateur utilisé correspond à une discrétisation de la formule de Taylor à l'ordre 2 :

$$x_{n+1} = \frac{5}{2}x_n - 2x_{n-1} + \frac{1}{2}x_{n-2}. \quad (18)$$

Pour l'approche temporelle, on fixe initialement la valeur de  $\omega^R$ , et l'on recherche les valeurs de  $(k, \omega^I)$  qui minimisent et annulent la fonction  $\frac{\|D(k,\omega)\|}{1+\|D(k,\omega)\|}$ . Les valeurs croissantes de  $k$  correspondent aux valeurs croissantes de  $m$ . Puis on fait varier par petit pas  $\omega^R$  et l'on estime les nouvelles positions des minima à l'aide du même estimateur que l'approche spatiale.

### 2.1 La structure des modes

Toutes les courbes des modes sont tracées en échelle logarithmique en utilisant des variables adimensionnées. Ainsi, pour l'approche spatiale, on définit  $(T, \lambda_r, \lambda_i)$  tel que :

$$\begin{cases} \frac{R\omega}{c_{si}} = \frac{2\pi}{T} \\ Rk^R = \frac{2\pi}{\lambda_r} \\ Rk^I = -\frac{1}{\lambda_i} \end{cases}, \quad (19)$$

et pour l'approche temporelle, on définit  $(\lambda, \tau_r, \tau_i)$  tel que :

$$\begin{cases} Rk = \frac{2\pi}{\lambda} \\ \frac{R\omega^R}{c_{si}} = \frac{2\pi}{\tau_r} \\ \frac{R\omega^I}{c_{si}} = \frac{1}{\tau_i} \end{cases}. \quad (20)$$

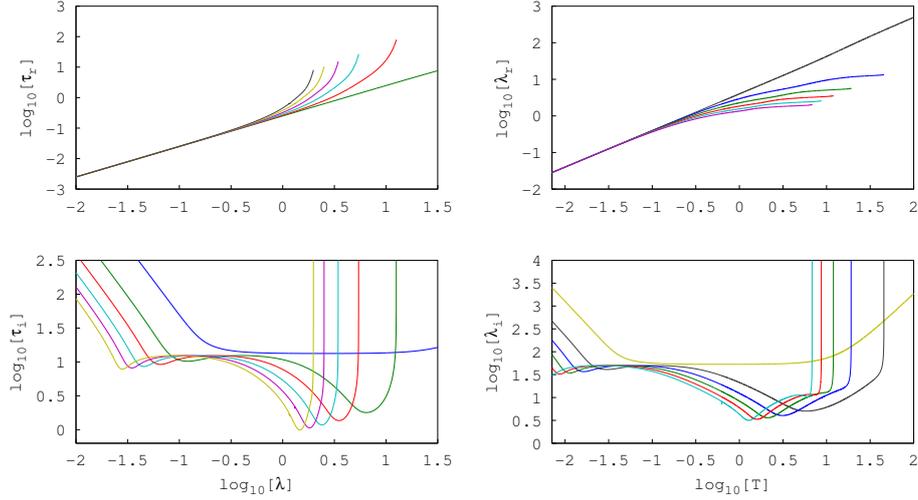


FIGURE 5 – La structure des modes  $l = 0$  et  $m \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$ . Les modes temporeux sont à gauche, les modes spatiaux sont à droite. Pour attribuer à chaque courbe le nombre radial  $m$  correspondant, il suffit d'utiliser la règle suivante : pour les modes temporeux, les  $m$  croissants correspondent aux  $\lambda$  décroissants ; pour les modes spatiaux, les  $m$  croissants correspondent aux  $\lambda_r$  décroissants pour le graphe du haut et aux  $T$  décroissants pour le graphe du bas.

On retiendra pour faciliter la lecture des courbes que les faibles valeurs de  $\lambda_i$  ou  $\tau_i$  correspondent aux fortes instabilités. En effet,  $\lambda_i$  (respectivement  $\tau_i$ ) correspond à la distance nécessaire (respectivement le temps nécessaire) pour que l'amplitude de la perturbation soit multipliée par un facteur  $e$ .

Les résultats présentés ici utilisent les valeurs suivantes pour les paramètres de la relation de dispersion :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_i}{c} = 5.10^{-4} \\ \Gamma = \frac{5}{3} \\ \frac{c_{si}}{c} = 10^{-4} \\ \frac{c_{se}}{c} = 3.10^{-5} \end{array} \right. , \quad (21)$$

qui correspondent à un jet non relativiste de faible densité et supersonique.

La figure 5 présente les modes temporeux et spatiaux pour  $l = 0$ . Le mode ordinaire  $m = 0$  est le moins instable de tous ; il naît au point de stabilité marginale ( $k = 0, \omega = 0$ ), atteint son maximum d'instabilité dans l'intervalle  $\lambda \in [-10R, 10R]$ , et meurt dans les petites longueurs d'ondes. Les modes de réflexions  $m \geq 1$  sont plus instables ; ils naissent à partir de  $\lambda \approx 10R$ , atteignent leur maximum d'instabilité rapidement, puis meurent dans les petites longueurs d'ondes. On remarque que plus  $m$  est grand est plus l'instabilité est grande et correspond à des petites longueurs d'ondes.

La figure 6 présente les modes temporeux et spatiaux pour  $l = 1$ . La structure des modes de réflexion  $m \geq 1$  est inchangée, on remarque simplement un décalage vers les petites longueurs d'ondes. Le mode ordinaire  $m = 0$  est beaucoup plus instable que pour  $l = 0$  et commence à concurrencer les taux d'instabilité des modes de réflexion. Pour les  $l$  croissants, le mode ordinaire est de plus en plus instable.

La résolution numérique semble donc donner la même structure de mode que celle trouvée analytiquement. Essayons maintenant de tester les expressions analytiques de la partie précédente. On se restreint à l'approche temporelle, mais l'on peut vérifier aisément que le test de l'approche spatiale donne des résultats similaires.

## 2.2 Naissance du mode ordinaire

On teste ici la validité de la formule donnée dans le tableau 1 pour la naissance du mode ( $m = 0, l = 0$ ) dans le cas de l'approche temporelle. On vérifie facilement que numériquement, lorsque  $\lambda$  est grand,  $v_\varphi \rightarrow v_i$  avec une excellente précision. La figure 7 présente la comparaison entre la formule analytique et les résultats numériques pour  $\tau_i$ . Là aussi, à condition d'avoir  $\lambda$  suffisamment grand, l'accord est bon.

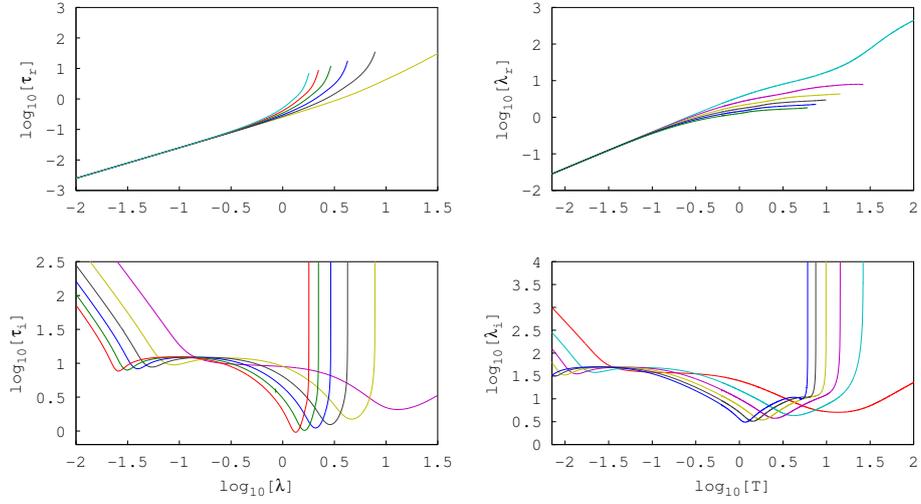


FIGURE 6 – La structure des modes  $l = 1$  et  $m \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$ . Les modes temporeux sont à gauche, les modes spatiaux sont à droite. Pour attribuer à chaque courbe le nombre radial  $m$  correspondant, il suffit d'utiliser la règle suivante : pour les modes temporeux, les  $m$  croissants correspondent aux  $\lambda$  décroissants ; pour les modes spatiaux, les  $m$  croissants correspondent aux  $\lambda_r$  décroissants pour le graphe du haut et aux  $T$  décroissants pour le graphe du bas.

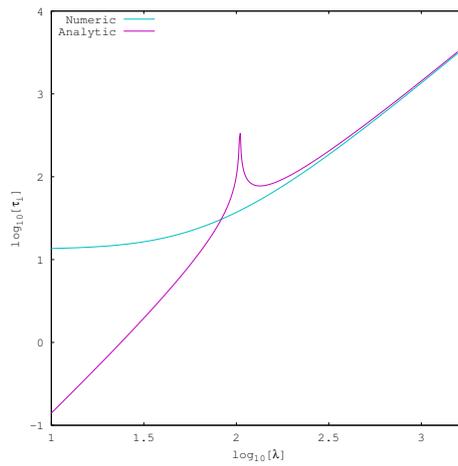


FIGURE 7 – Comparaison entre formule analytique et résultat numérique pour la naissance du mode ( $m = 0, l = 0$ ) à basse fréquence.

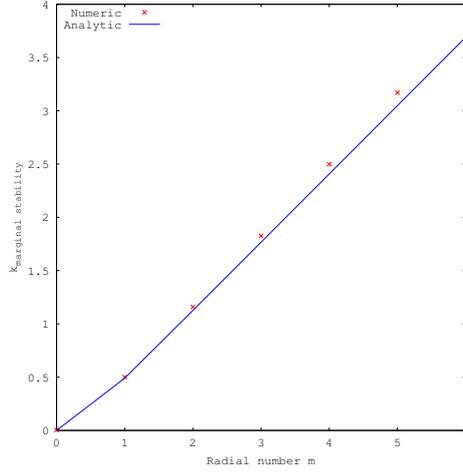


FIGURE 8 – Comparaison entre formule analytique et résultat numérique pour les points de stabilité marginale des modes  $(m, l)$

### 2.3 Naissance des modes de réflexion

On teste ici la validité de la formule donnée dans le tableau 1 pour les points de stabilité marginale des modes de réflexion  $m \geq 1$ . Je ne teste ici que les modes avec  $l = 0$  mais on vérifie que l'on obtient des résultats similaires pour  $l \geq 1$ . La figure 8 présente la comparaison entre formule analytique et résultats numériques. L'accord est relativement bon, mais la courbe numérique semble "s'écarter" de la courbe analytique. Cela est dû à l'algorithme de recherche : afin d'éviter divergence numérique et erreur d'arrondi, l'algorithme de recherche stoppe automatiquement lorsque  $\tau_i$  ou  $\lambda_i$  dépasse un certain seuil. Ainsi, les points numériques que j'utilise ici comme point de stabilité marginale sont situés à des longueurs d'onde légèrement plus faible que les vrais points de stabilité marginale, d'où le faible désaccord observé.

### 2.4 Maximum d'instabilité des modes de réflexion

Je teste ici les expressions des modes  $(m, l = 0)$  à leur maximum d'instabilité données par le tableau 2. On observe un bien meilleur accord en utilisant le facteur  $(l + 2m - \frac{1}{2})$  de la formule non relativiste de Payne (cf. [10]) au lieu de mon facteur  $(l + 2m)$ , mais cela n'est peut-être qu'une coïncidence, car le désaccord observé vient peut être du fait que  $\frac{v_i}{c_{si}} = 5$  ne soit pas assez grand (ce qui était une condition nécessaire pour la validité de la formule analytique). J'ai préféré ici adopter le facteur  $(l + 2m - \frac{1}{2})$  de Payne, mais il faudrait effectuer une autre simulation à plus haut Mach afin de départager les deux formules, et éventuellement corriger la mienne (je n'ai toujours pas trouvé d'erreur dans ma démonstration). La figure 9 présente les résultats obtenus avec le facteur de Payne. Pour  $l = 0$ , cette figure montre que l'accord est très bon, même pour les faibles  $m$ . Pour les  $l \geq 1$  croissants, on observe que l'accord est de moins en moins bon pour les faibles  $m$ , ce qui est attendu analytiquement étant donné la condition nécessaire  $(l + 2m)\frac{\pi}{2} \gg \|l^2 - \frac{1}{4}\|$  qui avait été trouvée.

### 2.5 Mort des modes $(m, l = 0)$

Enfin, je teste la formule du tableau 3 donnant le comportement asymptotiques de la mort des modes temporeux  $(m, l)$ . Afin de comparer analytique et numérique, j'effectue une régression linéaire de  $\log_{10}[\tau_i] = a \log_{10}[\lambda] - \log_{10}[b]$ . Analytiquement, on obtient :

$$\begin{cases} a_{analytic} = -2 \\ b_{analytic} = \frac{\eta \gamma_i^2 (l + 2m - \frac{1}{2})^2 (M_i - 1)^2}{16 \sqrt{\left(\frac{v^-}{c_{se}}\right)^2 - 1}} \end{cases} \quad (22)$$

On observe numériquement que  $v_\varphi \rightarrow v^-$  avec une excellente précision lorsque  $\lambda$  est suffisamment petit, quelque soit  $m$ . Par ailleurs,  $a_{numeric} \rightarrow -2$  là aussi avec une très bonne précision, quelque soit  $m$ . Par contre, la formule donnant  $b_{analytic}$  semble fautive, comme le montre la figure 10 : pour  $m$  suffisamment grand, on obtient bien que  $b$  doit varier en  $(l + 2m - \frac{1}{2})^2$ , mais numérique et analytique diffèrent d'un facteur d'environ 2.2. Je n'ai pas réussi à déceler la source de cette erreur, il faudrait réaliser d'autres simulations en faisant varier chacun des

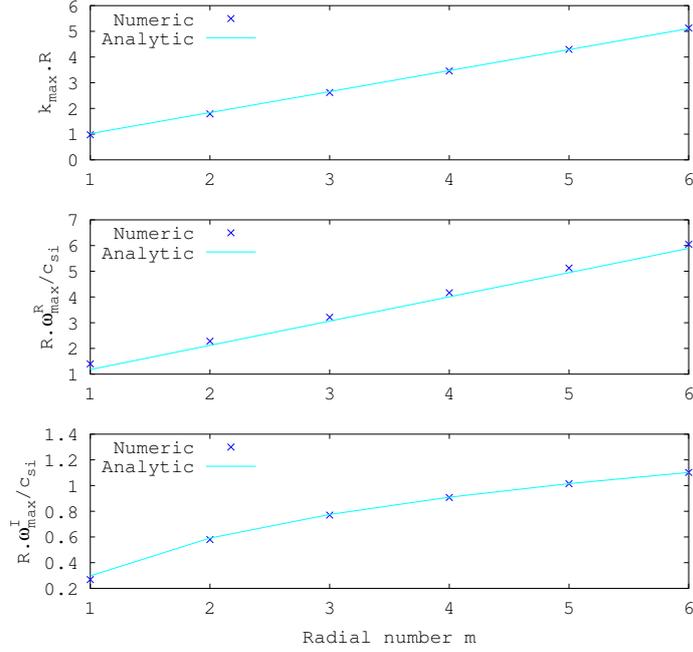


FIGURE 9 – Comparaison entre formule analytique et résultat numérique pour le maximum d’instabilité des modes  $(m, l)$

paramètres afin de corriger ma formule (il n’existe pas à ma connaissance d’auteurs ayant calculé cette limite analytique).

## 2.6 Bilan

Malgré quelques erreurs à corriger, l’accord entre analytique et numérique est bon. On retrouve en particulier la structure générale, avec des modes de plus en plus instables pour les petites longueurs d’ondes, et les dépendances générales pour les comportement asymptotiques.

## 3 Approche numérique : simulations avec le code hydrodynamique PLUTO

Dans cette partie, je présente les résultats de mes simulations hydrodynamiques effectuées à l’aide du code PLUTO. Je définis tout d’abord le dispositif numérique (grille utilisée, conditions aux limites imposées, traitement des résultats), puis les résultats obtenus pour quelques longueurs d’onde sont présentés et analysés.

### 3.1 Le dispositif numérique

L’objectif de cette partie est de retrouver numériquement les modes instables de la section semi-analytique, en se restreignant à l’approche temporelle et aux modes  $l = 0$  (symétrie cylindrique). Pour ce faire, on perturbe l’interface du jet à une longueur d’onde particulière  $\lambda$ , et l’on regarde comment l’amplitude de la perturbation évolue au cours du temps. On utilise les mêmes valeurs de densité, pression et vitesse utilisées dans la section précédente. Le schéma 11 présente les conditions aux limites données au code PLUTO, ainsi que la grille utilisée. On impose des profils initiaux sans gradients :

$$q(r, z) = q_i + (q_e - q_i) \Theta \left\{ 1 - \frac{R}{r} \left[ 1 + \epsilon \cos \left( \frac{2\pi z}{\lambda} \right) \right] \right\}, \quad (23)$$

où  $q = \rho$  ou  $v_z$ ,  $R$  est le rayon du jet,  $\epsilon$  l’amplitude relative de la perturbation, et  $\Theta$  la fonction de Heaviside. On note que du fait de la diffusion numérique (PLUTO est un code à volume fini), des gradients apparaîtront fatalement. Dans les unités du code PLUTO, on choisit  $R = 1$ , et l’on fixe la longueur  $L$  de la grille dans la direction du jet égale à la longueur d’onde  $\lambda$  (les conditions aux limites périodiques permettront de conserver la perturbation à cette longueur d’onde), avec 100 points dans cette direction. Afin de résoudre correctement

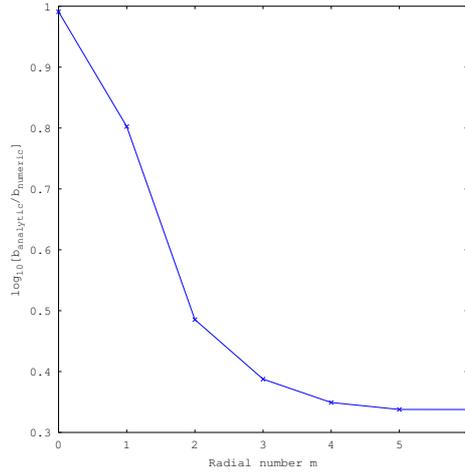


FIGURE 10 – Comparaison entre analytique et numérique du coefficient  $b$  de la régression  $\log_{10}[\tau_i] = a \log_{10}[\lambda] - \log_{10}[b]$ .

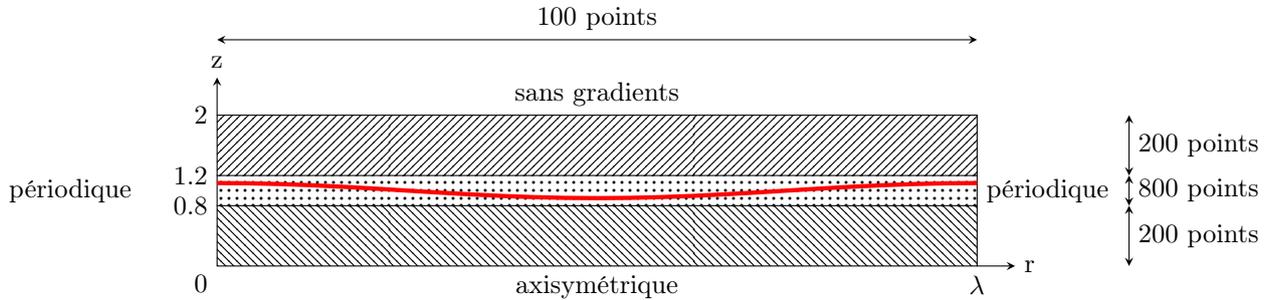


FIGURE 11 – La grille et les conditions aux limites utilisées pour l’intégration numérique

l’interface, on utilise une grille uniforme par morceau : la première grille couvre une bonne partie de l’intérieur du jet, avec  $r \in [0, 0.8]$  et 200 points dans cet intervalle ; la deuxième grille couvre l’interface, avec  $r \in [0.8, 1.2]$  et 800 points dans cet intervalle ; la troisième grille couvre une bonne partie de l’extérieur du jet, avec  $r \in [1.2, 2]$  et 200 points dans cet intervalle. On impose des conditions aux limites périodiques dans la direction du jet, afin de rendre le système équivalent à un jet de longueur infini, une condition aux limites axisymétrique pour l’axe du jet, afin de tenir compte de la géométrie cylindrique, et une condition aux limites "sans gradients" pour l’extérieur du jet.

Afin d’assurer la stabilité de l’algorithme d’intégration, la condition Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) est fixée initialement à 0.4, et limitée à 1.1. J’ai utilisé le schéma d’interpolation WENO3 sur la grille, qui est une reconstruction du troisième ordre. L’évolution temporelle est gérée par un schéma de Runge-Kutta d’ordre 3, et l’évaluation des flux est gérée par un schéma de Lax-Friedrichs.

Pour le traitement des données, j’ai réalisé un ensemble de scripts Perl et Octave permettant de récupérer automatiquement les points formant l’interface (on définit l’interface par l’isodensité  $\frac{\rho_i + \rho_e}{2}$ ), à partir des fichiers HFD5 calculés par PLUTO, et d’en déduire l’amplitude de la perturbation ainsi que sa phase en fonction du temps.

### 3.2 Quelques remarques sur la validité du dispositif numérique

Avant de présenter les résultats que j’ai obtenus, effectuons quelques remarques. Tout d’abord, on s’attend à ce que la perturbation ne croît pas immédiatement en exponentielle du temps, car la perturbation imposée est seulement une perturbation de l’interface, et non de l’ensemble des profils de pression, densité, et vitesse. Pour obtenir une croissance strictement exponentielle, il faudrait imposer les fonctions propres de Bessel calculées dans la partie analytique. On peut cependant espérer qu’après un régime transitoire, la solution du code PLUTO tende vers un régime permanent correspondant à ces fonctions propres, et donc que la croissance du mode devienne exponentielle.

Ensuite, la grille utilisée ne comprend qu’une période  $\lambda$  dans la direction du jet, et l’on peut se demander s’il n’est pas préférable de choisir plusieurs périodes, tout en conservant des conditions aux limites périodiques. En

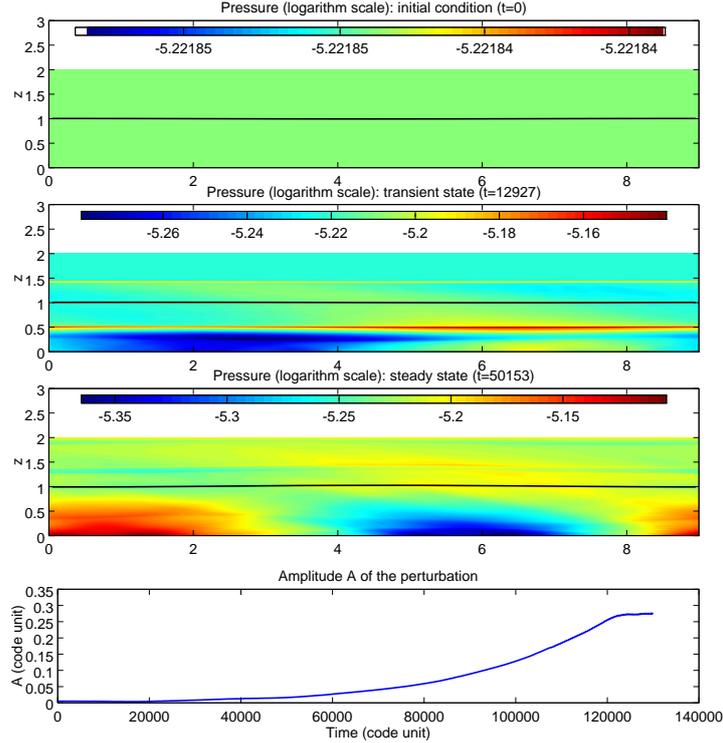


FIGURE 12 – Évolution de la solution numérique de pression, pour la longueur d’onde  $\lambda = 9$ . Après un certain temps, le régime permanent est atteint. L’interface est tracée en noir.

pratique, on vérifie aisément que les résultats finaux sont indépendants du nombre de périodes utilisé, et pour des raisons de puissance de calcul, on se limite à une période. De plus, j’ai vérifié que la grille non-uniforme (utilisée pour optimiser le temps de calcul) n’influe en rien sur les résultats finaux (une grille uniforme suffisamment fine donne les mêmes résultats).

Enfin, une seule longueur d’onde est imposée initialement, mais rien n’empêche des fréquences spatiales multiples de se développer : à cause des conditions aux limites périodiques, les longueurs d’ondes  $\frac{\lambda}{N}$ , avec  $N \in \mathbb{N}$ , sont a priori permises. Il est donc possible d’observer des interactions entre plusieurs modes, bien qu’une seule longueur d’onde soit fixée initialement.

### 3.3 Résultats

Tout d’abord, on retrouve comme attendu l’existence d’un régime transitoire et permanent. Dans le régime transitoire, une onde sonore rebondit plusieurs fois à l’intérieur du jet, avant d’atteindre le régime permanent, où pression, densité et vitesse adoptent des profils semblables à ce qui est attendu analytiquement. La figure 12 présente la condition initiale, le régime transitoire et le régime permanent de la solution de pression calculée par PLUTO pour la longueur d’onde  $\lambda = 9$ , ainsi que l’évolution au cours du temps de l’amplitude de la perturbation. On observe qu’initialement, cette amplitude décroît, puis après un certain temps, adopte une croissance exponentielle.

On effectue plusieurs simulations avec différentes longueurs d’ondes, et à chaque fois on effectue une régression exponentielle  $e^{\frac{t}{\tau_i}}$  afin de déterminer le temps d’instabilité  $\tau_i$ . La figure 13 présente les résultats obtenus en comparaison avec les courbes calculées dans la section précédente. Je n’ai pu obtenir que le mode radial  $m = 1$  car pour  $m = 0$ , les taux d’instabilité sont trop faibles, et l’instabilité bascule automatiquement sur un mode plus instable de fréquence multiple, et pour  $m > 1$ , l’interaction avec les autres modes devient trop importante, et le régime permanent n’est jamais atteint.

L’accord entre les modes est correct. Cependant, on observe que le maximum d’instabilité est légèrement décalé vers les petites longueurs d’onde. Je n’ai pas trouvé d’explication tangible à ce phénomène, on remarque simplement que plus la longueur d’onde est faible et plus l’interaction avec d’autres modes est importante (des longueurs d’onde parasites apparaissent dans l’interface, et le régime permanent n’est pas atteint).

En guise d’ouverture, j’ai remarqué que si l’on choisissait un profil avec une couche de cisaillement de taille

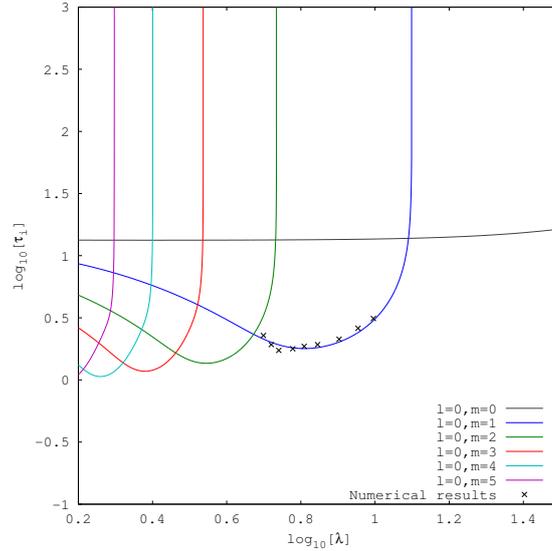


FIGURE 13 – Les modes issues de la simulation hydrodynamique, en comparaison avec les modes de la relation de dispersion

caractéristique  $\Delta r$ , alors le maximum d’instabilité devient moins instable lorsque la taille de la couche de cisaillement augmente, i.e.  $\tau_i$  augmente lorsque  $\Delta r$  augmente. Cela montre au moins que l’influence de la couche de cisaillement n’est pas à négliger. Il reste à vérifier l’influence de cette couche sur l’ensemble des modes, est pas seulement au maximum d’instabilité. On pourra se référer au travail de Birkinshaw sur la question, dans la limite non relativiste (cf. [2]).

En conclusion, on retrouve numériquement le mode ( $l = 0, m = 1$ ) de la relation de dispersion. Cela permet à la fois de valider le code hydrodynamique utilisé et la relation de dispersion, en admettant que les autres modes sont aussi valides (pour  $l > 0$  il faut passer à des simulations à trois dimensions, et pour  $m \neq 1$  il faut préciser la perturbation exacte et non plus une simple perturbation de l’interface). La suite de ce travail serait de basculer sur une situation plus réaliste, avec couche de cisaillement et mécanisme d’injection, de regarder quels modes émergent naturellement, et de caractériser le régime non-linéaire (saturation ou non des modes).

## Troisième partie

# Modèle de jet relativiste avec champ magnétique

On considère dans cette partie le même modèle de jet que la partie précédente, avec en plus un champ magnétique pris dans la direction de propagation du jet. Par manque de temps, je n’ai pu mettre en oeuvre que deux approches : approche analytique avec profils sans gradients, et approche semi-analytique pour résoudre numériquement la relation de dispersion.

## 4 Approche analytique

### 4.1 Relation de dispersion

On se place dans l’approximation de la magnétohydrodynamique (MHD) relativiste idéale :

1.  $\omega^2 < \omega_p^2$ ;
2.  $\omega \Omega_e < \omega_p^2$ ;
3.  $\omega < \Omega_i \left( \frac{\omega}{kc_s} \right)^2$ ;
4.  $\frac{c^2}{c_a^2} > 1$

avec  $\omega$  et  $k$  la pulsation et le vecteur d’onde d’un mode MHD caractéristique,  $\omega_p$  la pulsation plasma,  $\Omega_{i,e}$  les fréquences gyrotoires des ions et électrons,  $c_s$  la vitesse du son, et  $c_a$  la vitesse d’Alfvén. Les trois premières inégalités impliquent que l’on ne considère que des modes à basses fréquences, tandis que la dernière inégalité permet à la théorie d’être consistante avec l’approximation de résistivité nulle (cf. [5]).

Dans ce cas, les équations régissant la dynamique du modèle sont (cf. [5]) :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (24)$$

$$\gamma^2 \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \nabla P + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \gamma^2 \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) - \frac{P}{c^2} \right] + \nabla \cdot \left[ \gamma^2 \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) \mathbf{v} \right] = 0, \quad (26)$$

$$\frac{1}{P} \frac{DP}{Dt} = \frac{\Gamma}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}, \quad (27)$$

avec  $\mathbf{B}$  le champ magnétique.

On considère une situation d'équilibre avec des profils sans gradients, et l'on perturbe cette configuration :

$$\begin{cases} \mathbf{B} = B^{(0)} \mathbf{u}_z + \mathbf{B}^{(1)}(r) e^{i(kz+l\theta-\omega t)} \\ \mathbf{v} = v^{(0)} \mathbf{u}_z + \mathbf{v}^{(1)}(r) e^{i(kz+l\theta-\omega t)} \\ P = P^{(0)} + P^{(1)} e^{i(kz+l\theta-\omega t)} \\ \rho = \rho^{(0)} + \rho^{(1)} e^{i(kz+l\theta-\omega t)} \end{cases} \quad (28)$$

De même que dans la partie précédente, j'ai linéarisé l'ensemble des équations du système, afin de trouver l'équation régissant l'évolution de la perturbation en pression :

$$\frac{d^2 P^{(1)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dP^{(1)}}{dr} + \left[ \beta_{i,e}^2 k^2 - \left( \frac{l}{r} \right)^2 \right] P^{(1)} = 0, \quad (29)$$

avec les nouveaux coefficients  $\beta_{i,e}$  (toujours  $i$  pour le jet,  $e$  pour le milieu ambiant) :

$$\begin{cases} \beta_i = \sqrt{\frac{\left[ \left( 1 - \frac{v_i v_\varphi}{c^2} \right)^2 - \left( \frac{v_i - v_\varphi}{c_{si}} \right)^2 \right] \left[ \gamma_i^2 \left( \frac{v_i - v_\varphi}{c_{ai}} \right)^2 - 1 \right]}{\left( 1 - \frac{v_i v_\varphi}{c^2} \right)^2 - (v_i - v_\varphi)^2 \left( \frac{1}{c_{si}^2} + \frac{1}{c_{ai}^2} \right)}} \\ \beta_e = \sqrt{\frac{\left[ 1 - \left( \frac{v_\varphi}{c_{se}} \right)^2 \right] \left[ \left( \frac{v_\varphi}{c_{ae}} \right)^2 - 1 \right]}{1 - v_\varphi^2 \left( \frac{1}{c_{se}^2} + \frac{1}{c_{ae}^2} \right)}} \end{cases} \quad (30)$$

Dans ce dernier système, on a défini la vitesse du son  $c_s = \sqrt{\frac{\Gamma P^{(0)}}{\rho^{(0)}}}$ , la vitesse d'Alfvén  $c_a = \frac{B^{(0)}}{\sqrt{\mu_0 \left( \rho^{(0)} + \frac{P^{(0)}}{c^2} \right)}}$ , et la

vitesse de phase longitudinale  $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ . On choisit  $\Re(\beta_i) > 0$  par convention (à nouveau, l'équation est invariante par changement de signe, et aucune raison physique particulière nous oblige à choisir un signe particulier, cf. partie précédente). On se fixe les conditions aux limites suivantes :

1. Aucune des grandeurs ne doit diverger pour  $r$  quelconque,  $t$  fini.
2. Afin de respecter l'équilibre mécanique, la pression totale  $P + \frac{B^2}{2\mu_0}$  doit être continue au passage de l'interface jet/milieu ambiant.
3. Afin d'assurer la continuité de l'interface, le déplacement radial  $\xi_r$ , défini par  $\frac{D\xi_r}{Dt} = v_r^{(1)}$ , doit être continu en  $r = R$ .
4. Afin de respecter la condition de radiation de Sommerfeld (pas d'énergie provenant de l'infini), on impose que pour  $r \rightarrow \infty$ , la vitesse de phase radiale doit être positive.

Les conditions 1 et 4 impliquent que la solution de l'équation 29 peut se mettre sous la forme :

$$P^{(1)} = \begin{cases} \epsilon A_i \frac{J_l(\beta_i k r)}{J_l(\beta_i k R)} & , r < R \\ \epsilon A_e \frac{H_l(\beta_e k r)}{H_l(\beta_e k R)} & , r \geq R \end{cases}, \quad (31)$$

avec  $\Re(\beta_e) > 0$  (Sommerfeld),  $\Im(\beta_e k) > 0$  (pas de divergence quand  $r \rightarrow \infty$ ),  $\epsilon \ll 1$  (petite perturbation) et  $A_{i,e}$  des coefficients à déterminer de l'ordre de la pression à l'ordre 0. On pose  $B_{i,e}$  les champs magnétiques à l'ordre 0 et  $P_{i,e}$  les pressions à l'ordre 0. La condition 2 implique à l'ordre 0 que :

$$P_i + \frac{B_i^2}{2\mu_0} = P_e + \frac{B_e^2}{2\mu_0}, \quad (32)$$

	$(m = 0, l = 0)$	$(m = 0, l \geq 1)$	$(m \geq 1, l)$
Stab. Marg.	$\begin{cases} \omega_{0,0} = 0 \\ k_{0,0} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \omega_{0,l} = 0 \\ k_{0,l} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \omega_{m,l} = \frac{c_{ae} \alpha_{m,l}}{\beta_i^* R} \\ k_{m,l} = \frac{\alpha_{m,l}}{\beta_i^* R} \end{cases}$
Temporel	Stable	$\begin{cases} kR \ll 1 \\ \omega_{0,l}^R = kv_i \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \eta} \\ \omega_{0,l}^I = kv_i \frac{\gamma_i \sqrt{\eta}}{\gamma_i^2 + \eta} \sqrt{1 - \left(\frac{v_{bf}}{v_i}\right)^2} \end{cases}$	Indeterminé
Spatial	Stable	$\begin{cases} \frac{R\omega}{c_{si}} \ll 1 \\ k_{0,l}^R = \frac{\omega}{v_i} \left[ \frac{\gamma_i^2 + \eta}{\gamma_i^2 + \eta \sqrt{1 - \left(\frac{v_{bf}}{v_i}\right)^2}} \right] \\ k_{0,l}^I = \frac{\omega \sqrt{\eta}}{v_i \gamma_i} \left[ \frac{\gamma_i^2 + \eta}{\gamma_i^2 + \eta \sqrt{1 - \left(\frac{v_{bf}}{v_i}\right)^2}} \sqrt{1 - \left(\frac{v_{bf}}{v_i}\right)^2} \right] \end{cases}$	Indeterminé

TABLE 4 – Limites asymptotiques des modes pour les basses fréquences

et à l'ordre 1 que  $P^{(1)} + \frac{B^{(0)}B_z^{(1)}}{\mu_0}$  soit continu au passage de l'interface. En utilisant les équations linéarisées du système, j'en ai déduit avec la condition 3 la relation de dispersion suivante :

$$D(k, \omega) \equiv \frac{H_l'(\beta_e kR)}{H_l(\beta_e kR)} \frac{\beta_e}{\left(\rho_e + \frac{P_e}{c_s^2}\right) [v_\varphi^2 - c_{ae}^2]} - \frac{J_l'(\beta_i kR)}{J_l(\beta_i kR)} \frac{\beta_i}{\left(\rho_i + \frac{P_i}{c_s^2}\right) [\gamma_i^2 (v_\varphi - v_i)^2 - c_{ai}^2]} = 0. \quad (33)$$

On retrouve la même relation de dispersion que Ferrari (cf [6]). Du fait de la ressemblance avec la relation de dispersion sans champ magnétique de la partie précédente, la résolution analytique sera très semblable.

## 4.2 Limite des basses fréquences : naissance des modes

Le tableau 4 présente les résultats obtenus pour les basses fréquences, avec  $v_{bf} = \sqrt{\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\gamma_i^2}\right) (\eta c_{ae}^2 + c_{ai}^2)}$  et  $\beta_i^* = \beta_i (v_\varphi = c_{ae})$ . Pour des champs magnétiques nuls, on retrouve bien les expressions de la partie précédente. A mesure que le champ magnétique augmente,  $v_{bf}$  augmente, stabilisant ainsi petit à petit les modes instables ( $l \geq 1, m = 0$ ), jusqu'à les transformer en modes stables lorsque  $v_{bf} = v_i$ . D'autre part, toujours lorsque le champ magnétique augmente, les points de stabilité marginale sont déplacés vers les petites longueurs d'onde (en effet,  $\beta_i^* \rightarrow 0$  lorsque  $v_{bf} \rightarrow v_i$ ). Si ces points de stabilité marginale correspondent toujours à la naissance des modes, alors l'ensemble des modes est déplacé vers les petites longueurs d'onde. J'ai par ailleurs trouvé que le mode ( $m = 0, l = 0$ ) est stable pour les très basses fréquences.

## 4.3 Limite des hautes fréquences : résonance des modes instables

Le tableau 5 présente les formules analytiques des modes à leur maximum de coefficient de réflexion, valides pour  $m$  grand et  $v_i \gg \frac{(\gamma_i + 1)c_s}{\gamma_i}$ , en supposant que les fluides du jet et du milieu ambiant possèdent le même champ magnétique, la même densité et la même pression. Lorsque le champ magnétique est différent de 0, le point donné du mode ( $m, l$ ) ne correspond pas tout à fait au maximum d'instabilité : il se déplace continument du maximum d'instabilité pour  $c_a = 0$  au point de stabilité marginale pour  $c_a = \frac{\gamma_i v_i}{\gamma_i + 1}$ . Lorsque  $c_a$  augmente, le point considéré du mode commence par devenir plus instable, puis finit par se stabiliser de plus en plus, jusqu'à être confondu avec le point de stabilité marginale où il n'y a pas d'instabilité.

Temporel	$\left\{ \begin{array}{l} k_{m,l} = \frac{(l+2m)\pi}{2MR} \left(1 + \frac{1}{\gamma_i}\right) \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{c_a}{c_s}\right)^2}{1 - \left(\frac{\gamma_i+1}{\gamma_i}\right)^2 \left(\frac{c_a}{v_i}\right)^2}} \\ \omega_{m,l}^R = \frac{\pi c_s(l+2m)}{2R} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{c_a}{c_s}\right)^2}{1 - \left(\frac{\gamma_i+1}{\gamma_i}\right)^2 \left(\frac{c_a}{v_i}\right)^2}} \\ \omega_{m,l}^I = \frac{c_s}{2\gamma_i R} \sqrt{\left[1 + \left(\frac{c_a}{c_s}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{\gamma_i+1}{\gamma_i}\right)^2 \left(\frac{c_a}{v_i}\right)^2\right]} \Upsilon \left[\frac{2\gamma_i\pi(l+2m)}{\gamma_i+1}\right] \end{array} \right.$
Spatial	$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{m,l} = \frac{\pi c_s(l+2m)}{2R} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{c_a}{c_s}\right)^2}{1 - \left(\frac{\gamma_i+1}{\gamma_i}\right)^2 \left(\frac{c_a}{v_i}\right)^2}} \\ k_{m,l}^R = \frac{\pi(l+2m)}{2MR} \left(1 + \frac{1}{\gamma_i}\right) \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{c_a}{c_s}\right)^2}{1 - \left(\frac{\gamma_i+1}{\gamma_i}\right)^2 \left(\frac{c_a}{v_i}\right)^2}} \\ k_{m,l}^I = -\frac{1}{2\gamma_i MR} \sqrt{\left[1 + \left(\frac{c_a}{c_s}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{\gamma_i+1}{\gamma_i}\right)^2 \left(\frac{c_a}{v_i}\right)^2\right]} \Upsilon [2\pi(l+2m)] \end{array} \right.$

TABLE 5 – Limites asymptotiques des modes pour les hautes fréquences au minimum du coefficient de réflexion, pour  $m$  grand et  $v_i \gg \frac{(\gamma_i+1)c_s}{\gamma_i}$

#### 4.4 Limite des hautes fréquences : mort des modes instables

Le tableau 6 présente les résultats obtenus pour la mort des modes, valide pour  $m$  vérifiant  $(l+m-\frac{1}{2})\frac{\pi}{2} \gg \|l^2 + \frac{1}{4}\|$  et pour les hautes fréquences loin des résonances. La variable  $v^-$  est la même que dans la partie précédente. On observe une divergence étrange lorsque  $c_{ai} \rightarrow \frac{c_{si}}{\gamma_i(1-\frac{\beta^2}{M_i^2})}$ . Je n'ai pas trouvé d'explication particulière, mais on peut remarquer que dans la limite non relativiste, cela correspond à la vitesse d'Alfvén égale à la vitesse du son, où l'on sait qu'ondes magnéto-soniques lente et rapide ne deviennent qu'une. Au delà de cette résonance l'effet du champ magnétique est de stabiliser le mode instable  $(m, l)$ , jusqu'à le transformer en mode stable lorsque  $c_{ae} \rightarrow v^-$ .

## 5 Approche semi-analytique

Dans cette partie, je présente les premiers résultats issus de la résolution numérique de la relation de dispersion. Le même algorithme de la partie sans champ magnétique est utilisé, en remplaçant la relation de dispersion par celle trouvée précédemment. Par manque de temps, je n'ai pu faire une étude suffisamment complète, et n'ai pu tester que deux valeurs de champ magnétique. En effet, plusieurs problèmes sont apparus lors de cette résolution : apparition de points de rebroussement, difficulté à obtenir initialement les points de départ des modes.

Les points de rebroussement sont un véritable problème, car l'estimation quadratique n'est pas du tout adaptée au suivi de telles singularités. En effet, une fois le point de rebroussement passé (si par chance l'algorithme a réussi à tenir), les estimations deviennent absurdes du fait du changement de signe de la pente et la courbure. La solution serait de faire un algorithme à pas variable, qui détecte la proximité de ces points, bascule sur un pas en  $\omega^R$  ou  $\omega$  suffisamment petit, et "oublie" les points précédents afin de repartir sur une base saine une fois la singularité passée.

La difficulté à obtenir initialement les modes est due à une modification profonde de la surface paramétrée par la relation de dispersion lorsque le champ augmente. Notamment, j'ai pu observer que certains modes allaient

Temporel	$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{m,l}^R = \left[ \frac{M_i - 1}{M_i - \beta^2} \right] k v_i \\ \omega_{m,l}^I = \left\{ \frac{\eta c_{si} \gamma_i^2 (l + 2m - \frac{1}{2})^2 (M_i - 1)^2 \sqrt{\left[ 1 + \left( \frac{c_{ae}}{c_{se}} \right)^2 - \left( \frac{c_{ae}}{v^-} \right)^2 \right] \left[ 1 - \left( \frac{c_{ae}}{v^-} \right)^2 \right]}}{4R \sqrt{\left( \frac{v^-}{c_{se}} \right)^2 - 1} \left[ 1 - \gamma_i^2 \left( \frac{c_{ai}}{c_{si}} \right)^2 \left( 1 - \frac{\beta^2}{M_i} \right)^2 \right]^2} \right\} \frac{1}{(kR)^2} \end{array} \right.$
Spatial	$\left\{ \begin{array}{l} k_{m,l}^R = \left[ \frac{M_i - \beta^2}{M_i - 1} \right] \frac{\omega}{v_i} \\ k_{m,l}^I = \left\{ \frac{\eta \gamma_i^2 (l + 2m - \frac{1}{2})^2 (M_i - 1)^2 \sqrt{\left[ 1 + \left( \frac{c_{ae}}{c_{se}} \right)^2 - \left( \frac{c_{ae}}{v^-} \right)^2 \right] \left[ 1 - \left( \frac{c_{ae}}{v^-} \right)^2 \right]}}{4R \sqrt{\left( \frac{v^-}{c_{se}} \right)^2 - 1} \left[ 1 - \gamma_i^2 \left( \frac{c_{ai}}{c_{si}} \right)^2 \left( 1 - \frac{\beta^2}{M_i} \right)^2 \right]^2} \right\} \left( \frac{c_{si}}{R\omega} \right)^2 \end{array} \right.$

TABLE 6 – Expression du mode  $(m, l)$  avec  $m$  suffisamment grand, pour les hautes fréquences loin des résonances

se "cacher" dans des crevasses extrêmement fine, et qu'une erreur sur la zone de départ pour la recherche de minimum faisait diverger l'algorithme et planter le programme. Une gestion rigoureuse des erreurs devrait permettre de s'affranchir de ce souci, en effectuant une recherche fine au début et en ne gardant que les résultats cohérents.

Les résultats de cette partie s'appuie sur les valeurs suivantes pour les paramètres de la relation de dispersion :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_i}{c} = 0.5 \\ \frac{c_{si}}{c} = 0.05 \\ \frac{c_{se}}{c} = 0.05, \\ \eta = 1.0 \\ \frac{c_{ai}}{c_{ae}} = 1 \end{array} \right. , \quad (34)$$

qui correspond à un jet relativiste et supersonique se propageant dans un fluide de même caractéristique, avec un champ magnétique constant dans tout l'espace. Le paramètre de contrôle est la vitesse d'Alfven  $c_a = c_{ai} = c_{ae}$ . Seuls les modes spatiaux  $(m, l = 0)$  sont calculés. La figure 14 présente les résultats obtenus pour  $\frac{c_a}{c_s} = 0.01$  et  $\frac{c_a}{c_s} = 1$ .

Pour  $\frac{c_a}{c_s} = 0.01$ , la structure des modes est inchangée, comme attendu puisque cette situation correspond à un champ magnétique faible. Pour  $\frac{c_a}{c_s} = 1$ , seuls deux modes radiaux sont présents, car la recherche manuelle près des points de singularité prend beaucoup de temps.

Testons la validité des formules analytiques. D'après mon travail analytique, la position du maximum d'instabilité doit être modifié d'un facteur  $\sqrt{1 + \left( \frac{c_a}{c_s} \right)^2}$  entre champ magnétique nul et  $c_a = c_s$  (en effet,  $c_s \ll v_i$ ). Ainsi, en échelle logarithmique, on doit obtenir  $\Delta(\log_{10}[\lambda_r]) = \Delta(\log_{10}[\lambda_i]) = \Delta(\log_{10}[T]) = -\frac{\log_{10}[2]}{2} \equiv -0.1505$ . Numériquement, à l'aide de la figure 14, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta(\log_{10}[\lambda_r]) = -0.1533 \\ \Delta(\log_{10}[\lambda_i]) = -0.1318 \\ \Delta(\log_{10}[T]) = -0.152355 \end{array} \right. . \quad (35)$$

On en déduit que la dépendance en  $\sqrt{1 + \left( \frac{c_a}{c_s} \right)^2}$  est a priori exacte : pour  $c_a \in [0, c_s]$ , le champ magnétique déstabilise le jet. Pour  $c_a > c_s$ , vérifier la formule analytique s'avère plus compliqué car elle ne correspond plus au maximum d'instabilité.

Pour la naissance des modes, contrairement à ce que j'avais prévu, le mode ordinaire  $m = 0$  semble exister à toutes fréquences. Le point de stabilité marginale du mode  $m = 1$  prévu analytiquement correspond à  $\log_{10}[\lambda_r] =$

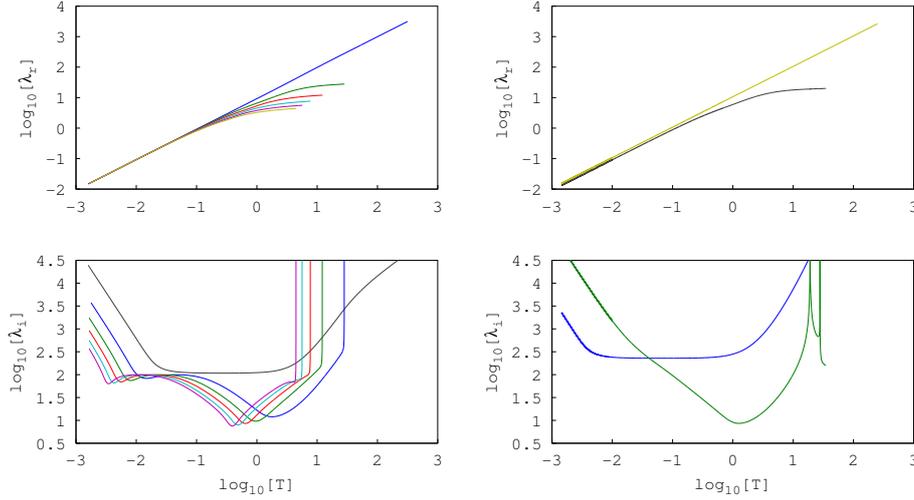


FIGURE 14 – Les modes spatiaux pour  $l = 0$ . Le cas  $\frac{c_a}{c_s} = 0.01$  se trouve à gauche, et le cas  $\frac{c_a}{c_s} = 1$  se trouve à droite. Les  $m$  croissants correspondent au  $\lambda_r$  décroissants pour les graphes du haut et aux  $T$  décroissants pour les graphes du bas

$\log_{10}[T] = 1.2794$ . Numériquement, on trouve que le premier pic en partant de la gauche du graphe en bas à droite de la figure 14 correspond à :

$$\begin{cases} \log_{10}[\lambda_r] = 1.28001 \\ \log_{10}[T] = 1.2801 \end{cases} \quad (36)$$

Mon résultat analytique semble donc correct. Par contre, ce point de stabilité marginale ne correspond pas à la naissance du mode puisque j'ai réussi à résoudre une branche à droite de ce pic. Il faudra donc tester numériquement comment cette nouvelle branche évolue lorsque le champ magnétique augmente.

Malgré quelques formules analytiques vérifiées, il reste beaucoup à faire numériquement sur cette relation de dispersion. Notamment, que se passe-t-il lorsque  $c_a$  approche de  $v_i$  ou  $v_i/2$  (j'ai essayé de trouver quelques modes pour ces valeurs de champ magnétique, mais je n'ai réussi à trouver aucun minimum qui résolve la relation de dispersion), et comment évolue la nouvelle branche qui apparaît à droite du point de stabilité marginale ?

## Quatrième partie

# Conclusion

En conclusion, j'ai pu retrouver deux relations de dispersion de la littérature dans le cas relativiste, avec ou sans champ magnétique. J'ai pu généraliser un bon nombre d'expressions analytiques de la littérature dans la limite relativiste. Malgré quelques erreurs, ces expressions sont en bon accord avec une résolution numérique. Les résultats les plus importants sont les suivants : le jet devient plus stable lorsque le facteur  $\gamma_i$  augmente ou lorsque le nombre de Mach  $M_i$  augmente (pour les modes spatiaux) ; pour les jets supersoniques, il existe des modes de plus en plus instables à mesure que la longueur d'onde de la perturbation décroît, et donc sans mécanisme pour couper ces longueurs d'ondes, il ne peut apparaître d'échelle (temporelle ou spatiale) caractéristique d'instabilité ; l'effet d'un champ magnétique est encore peu clair, mais plus la vitesse d'Alfvén est grande et plus les modes semblent décalés vers les petites longueurs d'ondes ;

Numériquement, j'ai pu vérifier avec un code hydrodynamique que l'on retrouve les modes analytiques en perturbant le jet à une certaine longueur d'onde. L'existence d'une couche de cisaillement semble stabiliser les maxima d'instabilité, même si cet effet est très certainement plus complexe sur l'ensemble des longueurs d'ondes.

Il reste à compléter la résolution numérique de la relation de dispersion avec champ magnétique, afin de voir si l'on retrouve certains résultats de la littérature (notamment, Ferrari affirme que pour les flots sub-alfvéniques, il n'existe plus de modes instables, cf. [6]), et effectuer des simulations numériques un peu plus réalistes (trois dimensions, propagation générale, couche de cisaillement, champ magnétique...).

## Cinquième partie

# Annexes

## 6 Rappels sur les fonctions de Bessel et de Hankel

Dans cette annexe, je donne quelques rappels sur les fonctions de Bessel et de Hankel. On définit tout d'abord l'équation différentielle de Bessel :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0, \quad (37)$$

Cette équation admet deux solutions indépendantes, les fonctions de Bessel de première et seconde espèce :

$$\begin{cases} J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha} \\ Y_\alpha(x) = \lim_{\alpha' \rightarrow \alpha} \frac{J_{\alpha'}(x) \cos(\alpha' \pi) - J_{-\alpha'}(x)}{\sin(\alpha' \pi)} \end{cases}, \quad (38)$$

où  $\Gamma$  est la fonction gamma. Dans la définition de la fonction de Bessel de seconde espèce, la limite est justifiée dans le cas où  $\alpha \in \mathbb{N}$ . Ces deux solutions indépendantes peuvent être réutilisées afin de créer deux autres solutions indépendantes, les fonctions de Hankel de première et de seconde espèces :

$$\begin{cases} H_\alpha^{(1)}(x) = J_\alpha(x) + iY_\alpha(x) \\ H_\alpha^{(2)}(x) = J_\alpha(x) - iY_\alpha(x) \end{cases}. \quad (39)$$

Pour les petits arguments  $\|x\| \ll \sqrt{\alpha + 1}$ , ces fonctions admettent les équivalents suivants :

$$\begin{cases} J_\alpha(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \\ Y_\alpha(x) \sim \begin{cases} \frac{2}{\pi} \ln \left[\frac{x}{2}\right] & , \alpha = 0 \\ \frac{-\Gamma(\alpha)}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha & , \alpha > 0 \end{cases} \\ H_\alpha^{(1)}(x) \sim iY_\alpha(x) \\ H_\alpha^{(2)}(x) \sim -iY_\alpha(x) \end{cases}. \quad (40)$$

Pour les grands arguments  $\|x\| \gg \|\alpha^2 - \frac{1}{4}\|$ , ces fonctions admettent les équivalents suivants :

$$\begin{cases} J_\alpha(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[ x - \left( \alpha + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right] \\ Y_\alpha(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left[ x - \left( \alpha + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right] \\ H_\alpha(x)^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i \left[ x - \left( \alpha + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right]} \\ H_\alpha(x)^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i \left[ x - \left( \alpha + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right]} \end{cases}. \quad (41)$$

De manière générale,  $J_\alpha$  correspond à une fonction oscillante amortie, dont les zéros strictement positifs sont donnés par la suite  $\alpha_{m,\alpha}$  avec  $m \in \mathbb{N}^*$ .

## 7 Démonstration de la formule analytique des maxima d'instabilité de l'approche temporelle

On s'intéresse ici à la limite des hautes fréquences  $\omega$ , correspondant a priori aux petites longueurs d'onde (dans cette limite, les résultats analytiques de la configuration planaire sont valides, avec des modes à hautes fréquences non dispersifs), et cherchons une expression pour les modes  $(m, l)$ . Plus précisément, supposons que  $\|\beta_{i,e} k R\| \gg \|l^2 - \frac{1}{4}\|$ . Dans ce cas, en utilisant les équivalents des fonctions de Bessel et de Hankel, la relation de dispersion implique que :

$$\frac{e^{2i(\beta_i k R - \frac{2l+1}{4}\pi)} - 1}{e^{2i(\beta_i k R - \frac{2l+1}{4}\pi)} + 1} = \frac{Z_i}{Z_e}, \quad (42)$$

avec  $Z_i = \frac{\gamma_i^2(v_\varphi - v_i)^2}{\sqrt{\eta}\beta_i}$ ,  $Z_e = \frac{\sqrt{\eta}v_\varphi^2}{\beta_e}$ , et  $\eta = \frac{\rho_e + \frac{P(0)}{c^2}}{\rho_i + \frac{P(0)}{c^2}}$ . La dernière équation se met sous la forme suivante :

$$e^{-2i(\beta_i k R - \frac{2l+1}{4}\pi)} = \mathfrak{R}, \quad (43)$$

avec  $\mathfrak{R} = \frac{Z_e - Z_i}{Z_e + Z_i}$ . On peut remarquer que les  $Z_{i,e}$  correspondent aux impédances acoustiques des deux milieux, et donc que  $\mathfrak{R}$  correspond au coefficient de réflexion en amplitude (cf [10]). En s'inspirant de la démarche de Hardee (cf. [7]), cette équation admet formellement une infinité de solutions :

$$\beta_i k R = \left( l + 2m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} + \frac{i}{2} \ln \mathfrak{R}, \quad (44)$$

avec  $m \in \mathbb{N}$ . On vérifiera plus tard si le  $m$  introduit correspond effectivement au nombre radial introduit précédemment. Comme  $\mathfrak{R}$  peut être complexe, le  $\ln$  de l'expression précédente correspond à une détermination du logarithme permettant "d'éviter" la phase  $\phi$  de  $\mathfrak{R} = \|\mathfrak{R}\|e^{i\phi}$  (i.e. une prolongation naturelle du logarithme dans l'ensemble  $\mathbb{C} \setminus D$ , où  $D$  est une demi-droite partant de 0 et ne passant pas par  $e^{i\phi}$ ). En séparant partie imaginaire et partie réelle, on aboutit ainsi à :

$$\begin{cases} \Re(\beta_i k R) = \frac{1}{2} \left[ \left( l + 2m + \frac{1}{2} \right) \pi - \phi \right] \\ \Im(\beta_i k R) = \frac{1}{2} \ln \|\mathfrak{R}\| \end{cases}. \quad (45)$$

Afin d'aller plus loin dans la résolution, il faut faire une hypothèse sur l'ordre de grandeur du coefficient  $\mathfrak{R}$ . On s'intéressera dans cette sous-partie au cas résonant, i.e. quand  $\|\mathfrak{R}\| \ll 1$  et est minimal. Ce cas correspond à un accord de phase entre les impédances du jet et du milieu ambiant.

La démonstration qui suit s'appuie sur une analyse/synthèse : on suppose initialement que  $\|\frac{v_\varphi^R - v_i}{c_{si}}\| \gg \|1 - \frac{v_i v_\varphi^R}{c^2}\|$ ,  $v_\varphi^R \gg c_{se}$ ,  $v_\varphi^I \ll \|v_\varphi^R - v_i\|$  et  $v_\varphi^I \ll v_\varphi^R$ ; on vérifiera à la fin la réciproque, i.e. que la solution trouvée respecte bien ces hypothèses. Sous ces conditions, on obtient les expressions approchées suivantes pour les impédances acoustiques :

$$\begin{cases} Z_i \approx \frac{\gamma_i(v_i - v_\varphi)c_{si}}{\sqrt{\eta}} \\ Z_e \approx \sqrt{\eta}v_\varphi c_{se} \end{cases}, \quad (46)$$

ainsi que les expressions approchées suivantes pour les coefficients  $\beta_{i,e}$  :

$$\begin{cases} \beta_i \approx \frac{\gamma_i(v_i - v_\varphi)}{c_{si}} \\ \beta_e \approx \frac{v_\varphi}{c_{se}} \end{cases}. \quad (47)$$

Dans ce cas, le système 45 se simplifie en :

$$\begin{cases} k = \frac{1}{2\gamma_i M_i R} \left[ \frac{(l + 2m + \frac{1}{2})\pi - \phi}{1 - \frac{v_\varphi^R}{v_i}} \right], \\ v_\varphi^I = \frac{c_{si}}{2\gamma_i k R} \ln \frac{1}{\|\mathfrak{R}\|} \end{cases}, \quad (48)$$

avec l'expression approchée du coefficient de réflexion :

$$\mathfrak{R} = \frac{[v_\varphi^R(\sqrt{\kappa\eta} + \gamma_i) - \gamma_i v_i] + i[v_\varphi^I(\sqrt{\kappa\eta} + \gamma_i)]}{[v_\varphi^R(\sqrt{\kappa\eta} - \gamma_i) + \gamma_i v_i] + i[v_\varphi^I(\sqrt{\kappa\eta} - \gamma_i)]}, \quad (49)$$

où  $\kappa = \frac{\Gamma + (\frac{c_{se}}{c})^2}{\Gamma + (\frac{c_{si}}{c})^2}$ . On arrive donc au résultat qu'un minimum de  $\|\mathfrak{R}\| < 1$  correspond à un maximum de  $\omega^I$ , i.e. à un maximum d'instabilité. Compte tenu de  $v_\varphi^I \ll \|v_\varphi^R - v_i\|$  et  $v_\varphi^I \ll v_\varphi^R$ , on trouve que  $\|\mathfrak{R}\|$  est minimal lorsque :

$$\begin{cases} v_{\varphi,max}^R \approx \frac{\gamma_i}{\gamma_i + \sqrt{\kappa\eta}} v_i \\ \mathfrak{R}_{max} \approx \frac{(\gamma_i + \sqrt{\kappa\eta})^2}{\gamma_i \sqrt{\kappa\eta}} \frac{i v_{\varphi,max}^I}{2v_i} \end{cases}. \quad (50)$$

En utilisant ces expressions dans le système 48, on trouve :

$$\begin{cases} k_{m,l,max} = \frac{(l+2m)\pi}{2\gamma_i M_i R} \left(1 + \frac{\gamma_i}{\sqrt{\kappa\eta}}\right) \\ v_{\varphi,max}^I = \frac{c_{si}}{2\gamma_i k_{m,l,max} R} \Upsilon \left[ \frac{4M_i \gamma_i^2 \sqrt{\kappa\eta} k_{m,l,max} R}{(\gamma_i + \sqrt{\kappa\eta})^2} \right] \end{cases}, \quad (51)$$

où la fonction  $\Upsilon(x)$  est définie par l'équation implicite  $\Upsilon(x) + \ln[\Upsilon(x)] = \ln x$ . On retiendra de cette fonction trois propriétés :

1.  $\Upsilon(x) \sim_0 x$
2.  $\Upsilon(x) \sim_\infty \ln x$
3.  $\Upsilon(x) < \ln x$  si  $x > e$

Cependant, le second équivalent est inutilisable en pratique car la convergence est extrêmement lente (on commence à avoir une précision de l'ordre de 1% lorsque  $x$  est de l'ordre de  $10^{300}$ ).

La première équation du système 51 permet de déduire que  $\beta_i k R \approx (l+2m)\frac{\pi}{2}$ , égalité dont on peut tirer deux remarques. Premièrement, le  $m$  introduit précédemment correspond bien au nombre de zéros dans la perturbation de pression à l'intérieur du jet, car  $(l+2m)\frac{\pi}{2} \in ]\alpha_{l,m}, \alpha_{l,m+1}[$ , où  $\alpha_{l,m}$  correspond au  $m$ -ième zéro de la fonction de Bessel  $J_l$ . Deuxièmement, l'approximation  $\|\beta_i k R\| \gg \|l^2 - \frac{1}{4}\|$  effectuée au début permet de déduire que la solution finale ne sera valide que pour les  $m$  grands.

On réécrit le système précédent en :

$$\begin{cases} k_{m,l,max} = \frac{(l+2m)\pi}{2\gamma_i M_i R} \left(1 + \frac{\gamma_i}{\sqrt{\kappa\eta}}\right) \\ v_{\varphi,max}^R = \frac{v_i}{1 + \frac{\sqrt{\kappa\eta}}{\gamma_i}} \\ v_{\varphi,max}^I = \frac{v_i}{\pi(l+2m) \left(1 + \frac{\gamma_i}{\sqrt{\kappa\eta}}\right)} \Upsilon \left[ \frac{2\pi(l+2m)}{1 + \frac{\sqrt{\kappa\eta}}{\gamma_i}} \right] \end{cases}. \quad (52)$$

On arrive donc à l'expression du mode  $(m, l)$  à son maximum d'instabilité :

$$\begin{cases} k_{m,l,max} = \frac{(l+2m)\pi}{2\gamma_i M_i R} \left(1 + \frac{\gamma_i}{\sqrt{\kappa\eta}}\right) \\ \omega_{m,l,max}^R = \frac{\pi c_{si}(l+2m)}{2\sqrt{\kappa\eta} R} \\ \omega_{m,l,max}^I = \frac{c_{si}}{2\gamma_i R} \Upsilon \left[ \frac{2\pi(l+2m)}{1 + \frac{\sqrt{\kappa\eta}}{\gamma_i}} \right] \end{cases}. \quad (53)$$

Maintenant que l'analyse est effectuée, il reste la synthèse. Quatre conditions sont à vérifier :

1.  $\|v_{\varphi}^R - v_i\| \gg c_{si} \left(1 - \frac{v_i v_{\varphi}^R}{c^2}\right)$
2.  $v_{\varphi}^R \gg c_{se}$
3.  $v_{\varphi}^I \ll \|v_{\varphi}^R - v_i\|$
4.  $v_{\varphi}^I \ll v_{\varphi}^R$

Avec la solution trouvée, on obtient  $\|v_{\varphi}^R - v_i\| = \frac{v_i}{1 + \frac{\gamma_i}{\sqrt{\kappa\eta}}}$  et  $v_{\varphi}^R = \frac{v_i}{1 + \frac{\sqrt{\kappa\eta}}{\gamma_i}}$ , donc les conditions 1 et 2 sont vérifiées

à condition d'imposer en amont  $v_i \gg \max\left(c_{si} + \frac{1}{\gamma_i \kappa} c_{se}, c_{se} + \frac{\kappa}{\gamma_i} c_{si}\right)$ . Quand aux conditions 3 et 4, elles sont

aussi vérifiées à condition de choisir  $m$  assez grand, car  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\Upsilon(m)}{m} = 0$ .

On remarque que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \omega_{m,l,max}^I = +\infty$  et que  $\lim_{m \rightarrow \infty} k_{m,l,max} = +\infty$ . Ainsi, à mesure que la longueur d'onde de la perturbation décroît, le mode le plus instable associé est de plus en plus instable. Sur l'ensemble des modes  $(m, l)$ , il n'existe donc pas de temps caractéristique de croissance d'instabilité, à moins de supposer un mécanisme coupant les modes associés aux petites longueurs d'ondes.

Je démontre maintenant une condition nécessaire à l'existence des modes résonants. On définira l'existence de mode résonants par deux propriétés s'inspirant de ce qui précède :

1.  $v_{\varphi,max}^I$  tend vers 0 lorsque  $m$  tend vers l'infini.

2.  $\|\mathfrak{R}_{min}\|$  tend vers 0 lorsque  $m$  tend vers l'infini.

On suppose par ailleurs  $M_i > 1$ .

On pose  $v^- = \frac{v_i - c_{si}}{1 - \frac{\beta^2}{M_i^2}}$  et  $v^+ = \frac{v_i + c_{si}}{1 + \frac{\beta^2}{M_i^2}}$ , avec  $\beta = \frac{v_i}{c^2}$ . On déduit de l'expression de  $\beta_i$  :

$$\beta_i = \gamma_i \sqrt{\left[ \left( \frac{v_i}{c_{si}} - 1 \right) - v_\varphi^R \left( \frac{1}{c_{si}} - \frac{v_i}{c^2} \right) - i v_\varphi^I \left( \frac{1}{c_{si}} - \frac{v_i}{c^2} \right) \right] \left[ \left( \frac{v_i}{c_{si}} + 1 \right) - v_\varphi^R \left( \frac{1}{c_{si}} + \frac{v_i}{c^2} \right) - i v_\varphi^I \left( \frac{1}{c_{si}} + \frac{v_i}{c^2} \right) \right]}, \quad (54)$$

soit :

$$\beta_i = \frac{\gamma_i \sqrt{1 - \frac{\beta^4}{M_i^2}}}{c_{si}} \sqrt{(v_\varphi^R + i v_\varphi^I - v^-)(v_\varphi^R + i v_\varphi^I - v^+)} \quad (55)$$

ou encore :

$$\beta_i = \frac{\gamma_i \sqrt{1 - \frac{\beta^4}{M_i^2}}}{c_{si}} \sqrt{[(v_\varphi^R - v^+)(v_\varphi^R - v^+) - (v_\varphi^I)^2] + 2i v_\varphi^I \left[ v_\varphi^R - \frac{v^+ + v^-}{2} \right]} \quad (56)$$

D'autre part, on déduit de l'expression de  $\beta_e$  :

$$\beta_e = \frac{1}{c_{se}} \sqrt{(v_\varphi^R + i v_\varphi^I - c_{se})(v_\varphi^R + i v_\varphi^I + c_{se})} \quad (57)$$

d'où :

$$\beta_e = \frac{1}{c_{se}} \sqrt{[(v_\varphi^R - c_{se})(v_\varphi^R + c_{se}) - (v_\varphi^I)^2] + 2i v_\varphi^I v_\varphi^R} \quad (58)$$

En appliquant le résultat suivant :

$$a + ib = \sqrt{c + id} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm \sqrt{\frac{1}{2} [\sqrt{c^2 + d^2} + c]} \\ b = \pm \frac{d}{\sqrt{2 [\sqrt{c^2 + d^2} + c]}} \end{cases}, \quad (59)$$

on trouve à l'aide des expressions 56 et 58 de  $\beta_{i,e}$  que :

$$\begin{cases} \Re(\beta_i) = \frac{\gamma_i}{c_{si}} \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\beta^4}{M_i^2} \right) \left[ \sqrt{\{(v_\varphi^R - v^+)^2 + (v_\varphi^I)^2\} \{(v_\varphi^R - v^-)^2 + (v_\varphi^I)^2\}} + (v_\varphi^R - v^+)(v_\varphi^R - v^-) - (v_\varphi^I)^2 \right]} \\ \Im(\beta_i) = \frac{\gamma_i v_\varphi^I \left[ v_\varphi^R - \left( \frac{v^+ + v^-}{2} \right) \right] \sqrt{2 \left( 1 - \frac{\beta^4}{M_i^2} \right)}}{c_{si} \sqrt{\sqrt{\{(v_\varphi^R - v^+)^2 + (v_\varphi^I)^2\} \{(v_\varphi^R - v^-)^2 + (v_\varphi^I)^2\}} + (v_\varphi^R - v^+)(v_\varphi^R - v^-) - (v_\varphi^I)^2}} \end{cases} \quad (60)$$

et :

$$\begin{cases} \Re(\beta_e) = \frac{1}{c_{se}} \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sqrt{\{(v_\varphi^R - c_{se})^2 + (v_\varphi^I)^2\} \{(v_\varphi^R + c_{se})^2 + (v_\varphi^I)^2\}} + (v_\varphi^R - c_{se})(v_\varphi^R + c_{se}) - (v_\varphi^I)^2 \right]} \\ \Im(\beta_e) = \frac{v_\varphi^I v_\varphi^R \sqrt{2}}{c_{se} \sqrt{\sqrt{\{(v_\varphi^R - c_{se})^2 + (v_\varphi^I)^2\} \{(v_\varphi^R + c_{se})^2 + (v_\varphi^I)^2\}} + (v_\varphi^R - c_{se})(v_\varphi^R + c_{se}) - (v_\varphi^I)^2}} \end{cases} \quad (61)$$

On a imposé  $\Re(\beta_i) > 0$  par convention, et  $\Re(\beta_e) > 0$  à cause de la condition de radiation de Sommerfeld.

On recherche des modes instables donc  $v_\varphi^I > 0$ . La perturbation de pression doit être finie pour  $r$  infini, donc nécessairement  $\Im(\beta_e) > 0$ . Ainsi, le système 61 permet de déduire que  $v_\varphi^R > 0$ . D'autre part, la deuxième équation du système 45 permet de voir que  $\|\mathfrak{R}\| \ll 1$  impose  $\Im(\beta_i) < 0$ . Ainsi, le système 60 impose  $v_\varphi^R < \left( \frac{v^+ + v^-}{2} \right)$ .

Il reste par ailleurs à vérifier que  $\|\mathfrak{R}\|$  tend vers zéro quand  $v_\varphi^I$  tend vers zéro. On remarque avec les systèmes 60 et 61 que si  $(v_\varphi^R - v^+)(v_\varphi^R - v^-) < 0$  ou  $(v_\varphi^R - c_{se})(v_\varphi^R + c_{se}) < 0$ , alors  $Z_i$  ou  $Z_e$  est de l'ordre de  $\frac{1}{v_\varphi^I}$  lorsque  $v_\varphi^I$  tend vers zéro, et donc  $\mathfrak{R} = \frac{Z_e - Z_i}{Z_e + Z_i}$  ne peut pas tendre vers 0. On obtient donc nécessairement :

$$\begin{cases} v_\varphi^R < -c_{se} & \text{ou } v_\varphi^R > c_{se} \\ v_\varphi^R < v^- & \text{ou } v_\varphi^R > v^+ \end{cases} \quad (62)$$

Or, on vient de voir que nécessairement  $v_{\varphi}^R \in ]0, \frac{v^+ + v^-}{2}[$ , donc le système précédent impose  $v_{\varphi}^R \in ]c_{se}, v^-]$ . Ceci n'est possible que si  $v^- > c_{se}$ , i.e. :

$$v_i > \frac{c_{si} + c_{se}}{1 + \frac{c_{si}c_{se}}{c^2}}. \quad (63)$$

On vient donc de trouver une condition nécessaire à l'existence des maxima d'instabilité pour les modes de réflexion. A priori, cette condition n'est pas suffisante.

## Références

- [1] M. Birkinshaw. The Kelvin-Helmholtz instability for relativistic particle beams. I - Stability analyses in the time and space domains for vortex-sheet flows. *MNRAS*, 208 :887–903, June 1984.
- [2] M. Birkinshaw. The Kelvin-Helmholtz instability for relativistic particle beams. II - Flows bounded by a simple shear layer. *MNRAS*, 252 :505–527, October 1991.
- [3] M. Birkinshaw. Instabilities in Astrophysical Jets. *Ap&SS*, 242 :17–91, March 1996.
- [4] H. D. Curtis. Descriptions of 762 Nebulae and Clusters Photographed with the Crossley Reflector. *Publications of Lick Observatory*, 13 :9–42, 1918.
- [5] A. Ferrari, E. Trussoni, and L. Zaninetti. Magnetohydrodynamic Kelvin-Helmholtz instabilities in astrophysics. I - Relativistic flows - plane boundary layer in vortex sheet approximation. *MNRAS*, 193 :469–486, November 1980.
- [6] A. Ferrari, E. Trussoni, and L. Zaninetti. Magnetohydrodynamic Kelvin-Helmholtz instabilities in astrophysics. II Cylindrical boundary layer in vortex sheet approximation. *MNRAS*, 196 :1051–1066, September 1981.
- [7] P. E. Hardee. On the configuration and propagation of jets in extragalactic radio sources. *ApJ*, 234 :47–55, November 1979.
- [8] A. Mignone, G. Bodo, S. Massaglia, T. Matsakos, O. Tesileanu, C. Zanni, and A. Ferrari. PLUTO : A Numerical Code for Computational Astrophysics. *ApJS*, 170 :228–242, May 2007.
- [9] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. 1973.
- [10] D. G. Payne and H. Cohn. The stability of confined radio jets - The role of reflection modes. *ApJ*, 291 :655–667, April 1985.
- [11] T. P. Ray. Kelvin-Helmholtz instabilities in radio jets. *MNRAS*, 196 :195–207, July 1981.
- [12] P. A. G. Scheuer. Models of extragalactic radio sources with a continuous energy supply from a central object. *MNRAS*, 166 :513–528, March 1974.